Musterlösung 4

1. **a)** Seien $p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ und $q(x) = b_0 + \ldots + b_m x^m$ Polynome mit reellen Koeffizienten und seien λ und $\mu \in \mathbb{R}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n \geq m$. Zuerst einmal muss man sich vergewissern, dass die gegebene Menge abgeschlossen ist unter Vektoraddition und unter Skalarmultiplikation. Man sieht aber, dass $(p+q)(x) = (a_0+b_0)+\ldots+(a_m+b_m)x^m+a_{m+1}x^{m+1}+\ldots+a_n x^n$ und $\lambda p(x) = \lambda a_0+\ldots+\lambda a_n x^n$ auch wieder Polynome mit reellen Koeffizienten sind. Nun müssen wir alle acht Axiome überprüfen: Für die Kommutativität gilt zum Beispiel $(p+q)(x) = (a_0+b_0)+\ldots+(a_m+b_m)x^m+a_{m+1}x^{m+1}+\ldots+a_n x^n = (b_0+a_0)+\ldots+(b_m+a_m)x^m+a_{m+1}x^{m+1}+\ldots+a_n x^n = (q+p)(x)$, da der Körper der reellen Zahlen kommutativ ist. Ausserdem ist die Funktion $n(x) = 0$ ebenfalls ein Polynom und stellt das neutrale Element bezüglich Addition dar. Alle übrigen Axiome können direkt nachgerechnet werden. Somit bildet die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten einen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

b) Diese Menge enthält kein neutrales Element bezüglich Addition, denn das Polynom $n(x) = 0$ hat nicht Grad vier und ist somit nicht in der Menge enthalten. Deshalb bildet sie keinen Vektorraum.

c) Seien $p(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ und $q(x) = b_0 + \ldots + b_m x^m$ Polynome mit reellen Koeffizienten und einer Nullstelle bei $x = \frac{7}{2}$, und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann haben $(p+q)(x)$ und $\lambda p(x)$ beide auch eine Nullstelle bei $x = \frac{7}{2}$ und liegen deshalb auch in der Menge. Ausserdem gehört das Polynom $p(x) = 0$ ebenfalls dazu. Alle weiteren Axiome können direkt nachgerechnet werden. Die Menge ist also ein Vektorraum.

d) Seien $f, g \in V, \lambda \in \mathbb{R}$. Aus der Linearität der Ableitung folgt $(f+g)+(f+g)'' = f + f'' + g + g'' = 0$ und $(\lambda f) + (\lambda f)'' = \lambda(f + f'') = 0$. Also liegen $(f + g)$ und λf wieder in V. Ausserdem gilt $f(x) = 0 \in V$. Wiederum kann man alle anderen Axiome sehr einfach überprüfen. Also ist V ein Vektorraum.

e) Seien $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$ Elemente aus W_0 und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) = 0$ und $\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda(x_1 + x_2 + x_3) = 0$ sind $x + y$ und λx wieder in W_0. Alle übrigen Eigenschaften folgen sofort aus der Tatsache, dass W_0 eine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ ist und dass $\mathbb{R}^3$ selbst ein Vektorraum ist. Deshalb ist auch W_0 ein Vektorraum.

Bitte wenden!

f) Dies ist kein Vektorraum, denn für $x = (x_1, x_2, x_3) \in W_7$ liegt zum Beispiel $2x$ nicht mehr in W_7: $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2(x_1 + x_2 + x_3) = 14 \neq 7$.

g) Dies ist kein Vektorraum, da per Definition jeder Vektorraum mindestens ein Element, nämlich $\{0\}$, enthalten muss.

2. a) Wir nehmen an $x + a = 0$ und $x + b = 0$. Dann gilt:

$$a = a + 0 = a + (x + b) = (a + x) + b = (x + a) + b = 0 + b = b + 0 = b$$

Also $a = b$ und somit gibt es nur ein $(-x)$.

b)

$$x + (-1)x = 1x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0x.$$

Nun müssen wir noch zeigen dass $0x = 0$. Wir wissen dass gilt $0x = (0+0)x = 0x + 0x$. Es folgt:

$$0x = 0x + (0x + (-(0x))) = (0x + 0x) + (-(0x)) = 0x + (-(0x)) = 0$$

und somit gilt $x + (-1)x = 0$ und deshalb $(-1)x = (-x)$.

c) Wir führen den Beweis induktiv. $1 \cdot x = x$ ist die Verankerung. Wir nehmen an dass gilt $(n-1)x = (\underbrace{x + \ldots + x}_{n-1})$. Dann folgt

$$n \cdot x = (n - 1 + 1)x = (n-1)x + x = (\underbrace{x + \ldots + x}_{n-1}) + x = (\underbrace{x + \ldots + x}_{n})$$

Man beachte, dass bei allen Umformungen nur Voraussetzungen und die acht Vektorraumaxiome verwendet werden.

3. a) i) $z_1 := \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$, also $\mathrm{Re}(z_1) = \frac{1}{5}$ und $\mathrm{Im}(z_1) = -\frac{2}{5}$.

ii) $z_2 := \frac{\overline{5+3i}}{1-i} = \frac{(5-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{8+2i}{2} = 4 + i$, also $\mathrm{Re}(z_2) = 4$ und $\mathrm{Im}(z_2) = 1$.

iii) $z_3 := 5e^{\frac{\pi}{6}i} = 5(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$, also $\mathrm{Re}(z_3) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ und $\mathrm{Im}(z_3) = \frac{5}{2}$.

b) i) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ ist eine Kreisscheibe mit Radius eins um den Ursprung.

ii) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Im}(z) < 2\}$ ist ein horizontaler Streifen der Breite 2, der von den Geraden $y = 0$ und $y = 2$ begrenzt wird, wobei die erste Gerade zu M_2 gehört, die zweite nicht.

Siehe nächstes Blatt!

iii) $M_3 = \{e^{i\frac{1}{3}k\pi}, k = 0, ..., 5\}$ sind die Ecken eines regulaeren Sechsecks mit Schwerpunkt im Ursprung und Ecken auf dem Einheitskreis.

iv) Die Bedingung $|z - i|^2 < |z - 2i|^2$ liefert mit $z = x + iy$ die äquivalente Bedingung $y < \frac{3}{2}$. $M_4 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) < \frac{3}{2}\}$ ist der Halbraum der von der Geraden $y = \frac{3}{2}$ von oben begrenzt wird, diese jedoch nicht enthält. Man beachte, dass $2i \notin M_4$.

v) Mit $z = x + iy$ erhalten wir $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$. Also $M_5 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |x| \geq |y| \,\text{und}\, x^2 - y^2 < 1\}$. $|x| = |y|$ beschreibt genau die Winkelhalbierenden, $x^2 - y^2 = 1$ ist eine Hyperbel mit Hauptachsen $a = b = 1$. M_5 ist die Fläche, die zwischen den Winkelhalbierenden und der Hyperbel liegt, wobei die Winkelhalbierenden Teil von M_5 sind, die Hyperbel nicht.

c) Der Hauptwert des Arguments von z_1 ist $\frac{\pi}{4}$, sein Betrag $\sqrt{2}$, also $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. $z_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}e^{i\varphi}$, wobei $\varphi = \arctan(\frac{1}{2})$.

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + i)(1 + \frac{1}{2}i) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i,$$

$$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}e^{i\varphi} = \frac{\sqrt{10}}{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\varphi)}.$$

Bei der Multiplikation von zwei komplexen Zahlen werden also ihre Argumente addiert und ihre Beträge multipliziert.

4. Teste, ob für zwei beliebige Vektoren v, w aus diesen Teilmengen und für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ der Vektor $v + \lambda w$ auch in der Teilmenge liegt.

a) Ist ein reeller Unterraum: Sei $v = (0, x, 2x, 3x)$ und $w = (0, y, 2y, 3y)$. Dann ist

$$v + \lambda w = (0, x + \lambda y, 2x + 2\lambda y, 3x + 3\lambda y) = (0, z, 2z, 3z)$$

mit $z = x + \lambda y$, also liegt $v + \lambda w$ auch in der Teilmenge.

b) Ist kein reeller Unterraum: Betrachte z.B. den Vektor $v = (1, 1, 1)$, der in der Teilmenge liegt. Der Vektor $2v = (2, 2, 2)$ liegt nicht in der Teilmenge, denn es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $(2, 2, 2) = (x^3, x^2, x)$.

c) Ist ein reeller Unterraum: Sei $v = (x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1)$ und $w = (x_2, x_2 + y_2, x_2 - y_2)$. Dann ist

$$v + \lambda w = (x_1 + \lambda x_2, x_1 + \lambda x_2 + y_1 + \lambda y_2, x_1 + \lambda x_2 - y_1 - \lambda y_2).$$

Dieser Vektor liegt auch in der Teilmenge (mit $x := x_1 + \lambda x_2$, $y := y_1 + \lambda y_2$).

d) Ist ein reeller Unterraum: Die Menge $\{x^4 - y^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ist genau $\mathbb{R}$ selbst, also entspricht die angegebene Menge genau $\{(x, 0, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, welche offensichtlich ein Unterraum ist.

e) Ist kein reeller Unterraum: Die Vektoren $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ sind enthalten, deren Summe $(1, 1, 0)$ aber nicht.

f) Ist ein reeller Unterraum: Die Bedingung $a^2 = b^2$ ist äquivalent zu $a = \pm b$, und die Bedingung $ab \leq 0$ sagt, dass genau eines von a, b negativ ist, falls sie nicht 0 sind. Also ist $b = -a$, und die Menge lässt sich schreiben als $\{(a, -a, a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Sie ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$, da man die Abgeschlossenheit unter Addition und skalarer Multiplikation komponentenweise überprüfen kann.

g) Ist ein reeller Unterraum: Aus $x + y = 0$ entnehmen wir $y = -x$, was in der ersten Gleichung eingesetzt $x^2 - (-x)^2 + z^2 = z^2 = 0$ ergibt, also $z = 0$. In der zweiten Gleichung ergibt sich dann $x - y = 0$, woraus man mit $y = -x$ sofort $x = y = 0$ schliesst. Also ist das einzige Element dieser Menge die 0, die Menge bildet also einen Unterraum.

h) Ist kein reeller Unterraum: Die Menge ist zwar abgeschlossen unter Addition, da $\ln(p/q) + \ln(r/s) = \ln(pr/qs)$, und auch die $0 = \ln 1$ ist enthalten. Die skalare Multiplikation schlägt aber fehl, da beispielsweise

$$\frac{1}{2} \cdot \ln 2 = \ln \sqrt{2}$$

gilt, aber $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, somit nicht durch p/q dargestellt werden kann.