Tom Ilmanen

Musterlösung 5

1. **a)** Die Menge der Elemente $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ mit $u = x = 0$ enthält die 0 und ist abgeschlossen unter Addition, aber nicht unter skalarer Multiplikation mit komplexen Zahlen: So gilt z.B. $i \cdot (i, i) = -(1, 1)$, welches nicht mehr die Bedingung erfüllt.

b) Diese Menge ist ein komplexer Untervektorraum von $\mathbb{C}^2$, da $w = 0$ gilt und die Menge sich somit schreiben lässt als $\{(z, 0) \mid z \in \mathbb{C}\}$. Nun sieht man sofort, dass dies ein Untervektorraum ist.

c) Diese Menge ist kein komplexer Unterraum von $\mathbb{C}^2$: Betrachte z.B. das Element $(i, -i)$ unter der skalaren Multiplikation mit i:

$$i \cdot (i, -i) = (-1, 1).$$

-1 und 1 sind aber nicht komplex konjugiert!

Bemerkung: Als Teilmenge von $\mathbb{R}^4$ betrachtet ergibt die Bedingung $z = \bar{w}$ einen reellen Untervektorraum!

2. Wir überprüfen jeweils, ob Vektoren der Form $u + \lambda v$ in der betrachteten Menge enthalten sind, wobei u und v Elemente der Menge und $\lambda \in K$ sind.

a) Die Menge $U_1 \cap U_2$ ist ein Unterraum von V:

- Der Nullvektor $0 \in U_1 \cap U_2$ da $0 \in U_1$ und $0 \in U_2$;
- Seien $u, v \in U_1 \cap U_2$ und $\lambda \in K$, dann ist $u + \lambda v$ in $U_1 \cap U_2$ da es in U_1 und auch in U_2 ist.

b) Die Menge $U_1 \cup U_2$ ist im Allgemeinen kein Unterraum von V:

Betrachte zum Beispiel die Unterräume $U_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $U_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ von $\mathbb{R}^2$. Dann sind die beiden Vektoren $u = (1, 0)$ und $v = (0, 1)$ in $U_1 \cup U_2$, ihre Summe $u + v = (1, 1)$ jedoch nicht. $U_1 \cup U_2$ ist also nicht abgeschlossen unter Addition.

c) $U_1 \setminus U_2$ ist nie ein Unterraum von V, da die 0 fehlt.

d) Die leere Menge enthält kein neutrales Element und ist somit kein Vektorraum, also auch kein Untervektorraum.

Bitte wenden!

e) Die Menge $\{0\}$ bildet einen in V enthaltenen Vektorraum und ist somit ein Untervektorraum.

f) Die Menge $U_1 + U_2$ ist ein Unterraum von V:

- Wir haben $0 = 0 + 0 \in U_1 + U_2$;
- Seien $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2 \in U_1 + U_2$ (mit $u_1, v_1 \in U_1$ und $u_2, v_2 \in U_2$) und $\lambda \in K$, dann ist

$$u + \lambda v = u_1 + u_2 + \lambda(v_1 + v_2) = (u_1 + \lambda v_1) + (u_2 + \lambda v_2) \in U_1 + U_2$$

da $u_1 + \lambda v_1 \in U_1$ und $u_2 + \lambda v_2 \in U_2$.

3. **a)** Die Additions- und Multiplikationstabellen für $\mathbb{F}_3$ sind:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

b) Natürlich sind V und $\{0\}$ Untervektorräume von V. Alle anderen Untervektorräume von V werden von einem Element erzeugt. Diese sind

$$\{0, (1,0), (2,0)\}, \{0, (0,1), (0,2)\}, \{0, (1,1), (2,2)\}, \{0, (1,2), (2,1)\}.$$

Beachte, dass der Vektor 0 für den Nullvektor $(0,0) \in V = \mathbb{F}_3^2$ steht.

c),d) Siehe Musterlösung 6.

4. Notwendige Bedingung:
1. Fall: $v = 0$: es ist $w \in X_{v,w} \;\Rightarrow\; iw \in X_{v,w} = \mathbb{R}w \;\Rightarrow\; w = 0$.
2. Fall: $v \neq 0$: es ist $v \in X_{v,w} \;\Rightarrow\; iv = tv + uw$ für gewisse $t, u \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow\; v = \frac{u}{i-t} w$ für gewisse $t, u \in \mathbb{R}$.
In beiden Fällen ist

$$v = cw \text{ für ein } c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

Die Bedingung $(*)$ ist auch hinreichend dafür, dass $X_{v,w}$ ein komplexer Unterraum von $\mathbb{C}^2$ ist:

- $X_{v,w} \neq \varnothing$: klar.
- $y, z \in X_{v,w} \;\Rightarrow\; y = tv + uw,\; z = t'v + u'w$ für gewisse $t, u, t', u' \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow\; y + z = (tv + uw) + (t'v + u'w) = (t + t')v + (u + u')w \in X_{v,w}$.

Siehe nächstes Blatt!

-

$$\begin{aligned} y \in X_{v,w}, z \in \mathbb{C} \quad &\Rightarrow \quad y = tv + uw \overset{(*)}{=} (tc+u)w \\ &\Rightarrow \quad zy = \underbrace{(ztc+zu)}_{\substack{= \tilde{t}c + \tilde{u} \text{ mit } \tilde{t}, \tilde{u} \in \mathbb{R}, \text{ nämlich} \\ \tilde{t} = \frac{\operatorname{Im}(ztc+zu)}{\operatorname{Im} c} \in \mathbb{R}, \\ \tilde{u} = ztc + zu - \frac{\operatorname{Im}(ztc+zu)}{\operatorname{Im} c} c \in \mathbb{R}.}} w \overset{(*)}{=} \tilde{t}v + \tilde{u}w \in X_{v,w}. \end{aligned}$$

5. Die drei Vektoren erfüllen offenbar alle die Gleichung

$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}.$$

Andererseits lässt sich jeder Vektor (x_1, x_2, x_3) mit $x_2 = \frac{x_1+x_3}{2}$ als Linearkombination der drei gegebenen Vektoren schreiben: Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + 7c &= x_1, \\ 3a + 9c &= x_3 \end{aligned}$$

ergibt $c = \frac{3x_1 - x_3}{12}$ und $a = -\frac{3}{4}x_1 + \frac{7}{12}x_3$. Zur Kontrolle setzt man in der zweiten Koordinate ein und erhält $2a + 8c = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{7}{6}x_3 + 2x_1 - \frac{2}{3}x_3 = \frac{x_1+x_3}{2} = x_2$.

Also gilt $a \cdot (1,2,3) + c \cdot (7,8,9) = (x_1, x_2, x_3)$, d.h. (x_1, x_2, x_3) ist in der linearen Hülle der 3 angegebenen Vektoren. Die Lösung hat also zwei Freiheitsgrade.