Tom Ilmanen

Musterlösung 6

1. Wir lösen zuerst Teilaufgabe **b)** und konstruieren damit den Körper aus Aufgabe **a)**.

Das Polynom $X^2 + 1$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{F}_3$, da $0^2 + 1 = 1$, $1^2 + 1 = 2$, $2^2 + 1 = 2$ gilt. Sei ξ nun so, dass $\xi^2 + 1 = 0$ gelte. Wenn wir nun ξ zur Menge $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ hinzufügen und sie unter Addition und Multiplikation abschliessen, so erhalten wir die Menge $M := \{0, 1, 2, \xi, \xi + 1, \xi + 2, 2\xi, 2\xi + 1, 2\xi + 2\}$. Ausserdem erhalten wir mit den üblichen Regeln der Assoziativität, Kommutativität und Distributivität folgende Additions- und Multiplikationstabellen:

$+$	0	1	2	ξ	$\xi+1$	$\xi+2$	2ξ	$2\xi+1$	$2\xi+2$
0	0	1	2	ξ	$\xi+1$	$\xi+2$	2ξ	$2\xi+1$	$2\xi+2$
1	1	2	0	$\xi+1$	$\xi+2$	ξ	$2\xi+1$	$2\xi+2$	2ξ
2	2	0	1	$\xi+2$	ξ	$\xi+1$	$2\xi+2$	2ξ	$2\xi+1$
ξ	ξ	$\xi+1$	$\xi+2$	2ξ	$2\xi+1$	$2\xi+2$	0	1	2
$\xi+1$	$\xi+1$	$\xi+2$	ξ	$2\xi+1$	$2\xi+2$	2ξ	1	2	0
$\xi+2$	$\xi+2$	ξ	$\xi+1$	$2\xi+2$	2ξ	$2\xi+1$	2	0	1
2ξ	2ξ	$2\xi+1$	$2\xi+2$	0	1	2	ξ	$\xi+1$	$\xi+2$
$2\xi+1$	$2\xi+1$	$2\xi+2$	2ξ	1	2	0	$\xi+1$	$\xi+2$	ξ
$2\xi+2$	$2\xi+2$	2ξ	$2\xi+1$	2	0	1	$\xi+2$	ξ	$\xi+1$

$\cdot$	0	1	2	ξ	$\xi+1$	$\xi+2$	2ξ	$2\xi+1$	$2\xi+2$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	ξ	$\xi+1$	$\xi+2$	2ξ	$2\xi+1$	$2\xi+2$
2	0	2	1	2ξ	$2\xi+2$	$2\xi+1$	ξ	$\xi+2$	$\xi+1$
ξ	0	ξ	2ξ	2	$\xi+2$	$2\xi+2$	1	$\xi+1$	$2\xi+1$
$\xi+1$	0	$\xi+1$	$2\xi+2$	$\xi+2$	2ξ	1	$2\xi+1$	2	ξ
$\xi+2$	0	$\xi+2$	$2\xi+1$	$2\xi+2$	1	ξ	$\xi+1$	2ξ	2
2ξ	0	2ξ	ξ	1	$2\xi+1$	$\xi+1$	2	$2\xi+2$	$\xi+2$
$2\xi+1$	0	$2\xi+1$	$\xi+2$	$\xi+1$	2	2ξ	$2\xi+2$	ξ	1
$2\xi+2$	0	$2\xi+2$	$\xi+1$	$2\xi+1$	ξ	2	$\xi+2$	1	2ξ

Wir sehen, dass $(M, +)$ eine additive Gruppe und $(M \setminus \{0\}, \cdot)$ eine multiplikative Gruppe ist. Somit ist M ein Körper mit 9 Elementen.

Wir haben auch gesehen, dass das Polynom $X^2 + 1 = 0$ keine Lösung in $\mathbb{F}_3$, jedoch sehr wohl eine in $M = \mathbb{F}_9$.

Bitte wenden!

2. **a)** Es gilt

$$2x^3 + 3x^2 - 1 = 2p_1(x) + p_2(x) + p_4(x).$$

b) Die lineare Hülle V der 4 Vektoren ist genau der Vektorraum der Polynome von Grad höchstens 3:

Aus $3p_4(x) - 2p_3(x) = 1$ sieht man, dass alle konstanten Polynome in V sind. Analog folgt aus $3p_3(x) - 4p_4(x) = x$, dass alle Polynome vom Grad 1 enthalten sind. Durch Subtrahieren von Elementen aus V erhält man die Linearkombination $p_2(x) + 2x + 4 = x^2$, somit sind alle Polynome der Form cx^2 in V enthalten. Zu guter letzt folgt analog zu $x^2 \in V$ auch $p_1(x) - x^2 = x^3 \in V$. Damit sind alle Polynome vom Grad höchstens 3 in V enthalten.

Umgekehrt ist die lineare Hülle auch nicht grösser, da aus Linearkombinationen von Polynomen mit Grad höchstens 3 keine anderen Polynome entstehen können.

3. Wir wählen den Vektorraum $V := \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Seien nun λ, $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda sin + \mu cos = 0$. Gemäss der Definition der Addition in V muss also für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten, dass $\lambda sin(x) + \mu cos(x) = 0$. Also auch $0 = \lambda sin(0) + \mu cos(0) = \mu$ und $0 = \lambda sin(\pi/2) + \mu cos(\pi/2) = \lambda$, das heisst sin und cos sind linear unabhängig.

4. **a)** Es gilt

$$(1, 0, 0, 1) + (2, 3, -3, 9) = (1, 3, -4, 7) + (2, 0, 1, 3),$$

also sind die Vektoren sind linear abhängig.

b) Aus

$$a \cdot (1, 2, 3, 4) + b \cdot (-3, 4, 2, 8) + c \cdot (-3, 9, 1, 3) = 0$$

folgt in der ersten Koordinate $a = 3(b + c)$. Eingesetzt in die drei weiteren Koordinaten ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} 10b & + & 15c & = & 0, \\ 11b & + & 10c & = & 0, \\ 20b & + & 15c & = & 0. \end{array}$$

Durch Subtrahieren der ersten Zeile von der dritten ergibt sich $10b = 0$ und somit $b = 0$, womit sofort $c = 0$ und dann $a = 0$ folgt. Also sind die 3 Vektoren linear unabhängig.

c) Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$, indem wir eine komplexe Zahl $x+iy$ mit dem Vektor (x, y) identifizieren. Die beiden komplexen Zahlen aus der Aufgabe entsprechen also den Vektoren $(1, 1)$ und $(1, -1)$ aus $\mathbb{R}^2$, welche offensichtlich linear unabhängig sind.

Siehe nächstes Blatt!

d) Über $\mathbb{C}$ sind die beiden komplexen Zahlen linear abhängig, denn es gilt

$$(1+i) - i(1-i) = 0.$$

e) Es gilt

$$\begin{aligned}\sin(x+2) &= \sin(x)\cos(2) + \cos(x)\sin(2),\\ \sin(x+1) &= \sin(x)\cos(1) + \cos(x)\sin(1).\end{aligned}$$

Auflösen der zweiten Zeile nach $\cos(x)$ und einsetzen in der ersten ergibt nacheinander

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \frac{\sin(x+1) - \sin(x)\cos(1)}{\sin(1)},\\ \Rightarrow \sin(x+2) &= \sin(x)\cos(2) + \sin(2)\cdot\frac{\sin(x+1) - \sin(x)\cos(1)}{\sin(1)}\\ &= \sin(x)\cdot\left(\cos(2) - \frac{\cos(1)\sin(2)}{\sin(1)}\right) + \sin(x+1)\cdot\frac{\sin(2)}{\sin(1)}\\ &= -\sin(x) + \sin(x+1)\cdot\frac{\sin(2)}{\sin(1)}.\end{aligned}$$

Somit sind die 3 Vektoren linear abhängig.

f) Die drei Vektoren sind linear abhängig, da $\sin(0x) = \sin(0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine Menge von Vektoren, welche 0 enthält ist automatisch linear abhängig.

g) Es sei $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ eine Linearkombination der angegebenen Vektoren, das heisst es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

n-maliges Ableiten dieser Gleichung ergibt

$$a_n \cdot n! = 0 \Rightarrow a_n = 0.$$

Ganz analog sind deshalb auch $a_{n-1} = a_{n-2} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$, somit sind die Vektoren linear unabhängig.

h) Wir verwenden vollständige Induktion über n und wollen beweisen, dass die Vektoren φ_n linear unabhängig sind.

Die Aussage ist klar für $n = 0$, da $\frac{\lambda}{x}$ nur für $\lambda = 0$ die Nullfunktion ist.

Sei die Aussage nun wahr für $n = k$. Betrachte die Linearkombination $a_0\varphi_0 + \ldots + a_{k+1}\varphi_{k+1}$: Falls $a_{k+1} = 0$, so ist die Aussage nach Induktionsvoraussetzung

Bitte wenden!

wahr. Sonst schreiben wir die Summe als

$$\frac{\sum_{0\le i\le k}\left(a_i \cdot \prod_{\substack{0\le j\le k\\ j\ne i}}(x+j)\right)}{\prod_{0\le i\le k}(x+i)} + \frac{a_{k+1}}{(k+1)+x} = 0.$$

Umformen ergibt

$$(x+(k+1))\left(\sum_{0\le i\le k} a_i \prod_{\substack{0\le j\le k\\ j\ne i}}(x+j)\right) = -a_{k+1}\prod_{0\le i\le k}(x+i).$$

Dies sind zwei Polynome in x. Auf der linken Seite ist $(x+(k+1))$ ein Teiler, also muss es auch das Polynom auf der rechten Seite teilen (als Polynom!). Dies ist aber nur möglich, falls $a_{k+1}=0$ gilt.

5. a) Wir können zum Beispiel $(2,1,0)$ und $(0,7,2)$ wählen.

b) Wir machen eine Fallunterscheidung.

Fall 1: $a \neq 0$. Dann können wir $(b,-a,0)$ und $(c,0,-a)$ wählen. Man überprüft leicht, dass diese Wahl für alle b und c funktioniert.

Fall 2: $a=0$.

Fall 2.1: $b \neq 0$. Dann können wir $(1,0,0)$ und $(0,c,-b)$ wählen.

Fall 2.2: $b=0$. Das bedeutet $c \neq 0$. Wähle also $(1,0,0)$ und $(0,1,0)$.