Tom Ilmanen

Musterlösung 7

1. **a)** Seien $v_1 := (1,1,0,1,1), v_2 = (0,0,1,1,0), v_3 = (0,1,0,0,0), v_4 = (1,0,0,1,1)$ und $v_5(1,0,1,0,1)$. Mit dem Gauss Algorithmus erhalten wir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Somit sehen wir, dass die lineare Hülle dieser Vektoren ein vierdimensionaler Vektorraum ist mit Basis $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$.

b) Die Rechnung für $\mathbb{F}_2^5$ geht ganz analog, bis auf die Tatsache, dass nun $2 = 0$ gilt. Somit bekommen wir zum Schluss

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Wir haben also einen dreidimensionalen Vektorraum mit Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$.

2. **a)** Durch Nachrechnen (zum Beispiel mit dem Gauss Algorithmus) sehen wir, dass die Vektoren v_1, v_2 und v_4 linear unabhängig sind. Der Vektor $v_3 = v_1 + v_4$ hängt linear von v_1 und v_4 ab. Demnach ist W eine dreidimensionale Hyperebene in $\mathbb{R}^4$. Es genügt also, den Normalenvektor $n := (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{R}^4$ zu bestimmen, welcher senkrecht auf v_1, v_2, v_4 steht. Dazu lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \langle n, v_1 \rangle &= 0 \\ \langle n, v_2 \rangle &= 0 \\ \langle n, v_4 \rangle &= 0, \end{aligned}$$

wobei $\langle n, v_i \rangle$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^4$ bezeichnet. Dieses Gleichungssystem ist also äquivalent zu den Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} n_1 & + & 2n_2 & + & n_3 & + & 2n_4 & = & 0 \\ & & & - & n_3 & + & n_4 & = & 0 \\ & & 2n_2 & + & n_3 & + & n_4 & = & 0. \end{array}$$

Duch sukzessives Auflösen dieser 3 Gleichungen, erhalten wir

$$n = (n_1, n_1, -n_1, -n_1)$$

für ein beliebiges $n_1 \in \mathbb{R}$. Da die Länge des Normalenvektors keine Rolle spielt, dürfen wir $n_1 = 1$ wählen und bekommen $n = (1, 1, -1 - 1)$. Um nun ein Gleichungssystem zu finden, dessen Lösugen in W liegen, brauchen wir nur noch die Bedingung

$$\langle n, x \rangle = 0$$

zu stellen, wobei $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ ist. Denn alle Vektoren

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

die diese Bedingung erfüllen (und somit dieses Gleichungssystem lösen), stehen senkrecht auf n und liegen damit in W. Also erhalten wir die Gleichung

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0.$$

b) Wegen der Beziehung $v_3 = v_1 + v_4$ sind die Vektoren v_1, v_3 und v_4 linear abhängig, wobei jeweils zwei davon linear unabhängig sind. Der Vektor v_2 ist linear unabhängig von allen anderen. Daher muss v_2 sicher Teil jeder Basis (die ausschliesslich die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 enthalten darf) sein. Somit ergeben sich die drei Möglichkeiten:

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, v_4\}, \quad \mathcal{B}_3 = \{v_2, v_3, v_4\}.$$

3. a) Die Lösungsmenge W der Gleichung

$$x + 2y - 3z = 0$$

beschreibt eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt. Um eine Basis davon zu finden, müssen wir also zwei linear unabhängige Vektoren b_1, $b_2 \in \mathbb{R}^3$ finden, welche diese Gleichung erfüllen. Durch kurzes Nachrechnen sehen wir, dass die Vektoren $b_1 = (2, -1, 0)$, $b_2 = (3, 6, 5)$ linear unabhängig sind und die gewünschte Gleichung erfüllen. Somit sind sie eine Basis von W. Diese Basis ist sogar orthogonal, d.h. $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$.

Siehe nächstes Blatt!

b) Sei V ein n-dimensionaler Raum und $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis von V. (In $\mathbb{R}^3$ zum Beispiel ist die Standardbasis $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$). Für eine beliebige Basis (von V) $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, $n \in \mathbb{N}$, b_i ein n-dimensionaler Vektor in V und einen beliebigen Punkt $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i b_i.$$

Mit der Basis aus a) bekommen wir daher die Gleichung

$$\tilde{x}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{x}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten damit für den Vektor $(1,1,1)$ in der Basis aus a) die Koordinaten $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$, die dem Punkt $\frac{1}{5}b_1 + \frac{1}{5}b_2 = (1,1,1)$ entsprechen.

c) Aus den Koordinaten $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^2$ lässt sich direkt der entsprechende Vektor $v \in W$ in den ursprünglichen Koordinaten bestimmen:

$$v = P_{\mathcal{B}}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{x}_1 b_1 + \tilde{x}_2 b_2 = \begin{pmatrix} 3\tilde{x}_2 + 2\tilde{x}_1 \\ 6\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 \\ 5\tilde{x}_2 \end{pmatrix}.$$

d) Um die Koordinaten $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ eines Vektors $v = (x_1, x_2, x_3) \in W$ zu bestimmen, müssen wir die Abbildung $P_{\mathcal{B}}$ invertieren, das bedeutet, wir müssen das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3\tilde{x}_2 + 2\tilde{x}_1 \\ 6\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 \\ 5\tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

nach $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_2$ auflösen. Das liefert uns

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = K_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3) = (\tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{3}{10}x_3, \tfrac{1}{5}x_3).$$

4. **a)** Durch Nachrechnen ergibt sich, dass die Vektoren $v_1 := (1,3,4,0,1)$ und $v_2 := (2,5,6,-2,1)$ linear unabhängig sind und $v_3 := (1,5,8,4,3) = 5v_1 - 2v_2$ eine Linearkombination von v_1 und v_2 ist. Somit haben wir einen zweidimensionalen Vektorraum mit Basis (v_1, v_2).

b) Mit Hilfe des Gauss Algorithmus' bekommen wir als Lösungsmenge für dieses Gleichungssystem den eindimensionalen Vektorraum $V := \{(-\frac{3}{2}z, \frac{5}{2}z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Eine Basis davon ist beispielsweise der Vektor $(-3, 5, 2)$.

Bitte wenden!

c) Den Nullvektor können wir als die leere Summe, das heisst die Summe über null Elemente, betrachten. Also ist die leere Menge $\emptyset$ eine Basis von $\{0\}$ und der Vektorraum hat Dimension 0.

(**Bemerkung:** Der Nullvektor 0 kann nie in einer Basis enthalten sein, da 0 nicht linear unabhängig ist.)

d) Sei V der Vektorraum $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | x + iy = 0\}$ über $\mathbb{C}$. Sei $(x, y) \in V$. Dann gilt $x + iy = 0 \Rightarrow y = ix$ und deshalb gilt $(x, y) = (x, ix) = x(1, i)$ für jedes $(x, y) \in V$. Also können wir jedes $(x, y) \in V$ als Linearkombination des Vektors $(1, i)$ schreiben. Dieser ist linear unabhängig in $\mathbb{C}^2$ und somit eine Basis von V. Die komplexe Dimension des Vektorraums ist daher eins. (Die reelle Dimension ist zwei, siehe e)).

e) In d) zeigten wir, dass sich jedes Element in V in der Form $x(1, i), x \in \mathbb{C}$ schreiben lässt. Wenn wir nun $x = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$ setzen, gilt

$$x(1, i) = (a + ib)(1, i) = a(1, i) + ib(1, i) = a(1, i) + b(i, -1).$$

Also lässt sich jedes $(x, y) \in V$ als reelle Linearkombination der Vektoren $(1, i)$ und $(i, -1)$ darstellen. Diese beiden sind in V als Vektorraum über $\mathbb{R}$ linear unabhängig und somit eine Basis. Der Raum ist daher reell zweidimensional.

f) Berechnen wir den Laplace des Polynoms $u(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz$, $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, so erhalten wir

$$\Delta u(x, y, z) = 2a + 2b + 2c.$$

Berücksichtigen wir, dass das Polynom harmonisch sein soll, also $\Delta u(x, y, z) = 0$, so bekommen wir die Bedingung

$$a + b + c = 0$$

an das Polynom

$$u(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Wählt man nun $a = 1$, $b = -1$, $c = d = e = f = 0$ so erhalten wir das Polynom $x^2 - y^2$, welches in der Menge und da es linear unabhängig ist sogar in der Basis liegt. Analog findet man mit $b = 1$, $c = -1$, $a = d = e = f = 0$ das Polynom $y^2 - z^2$. Das Polynom $z^2 - x^2$ liefert nichts Neues, da es eine Linearkobination der anderen beiden ist. Des weiteren finden wir mit $a = b = c = e = f = 0$, $d = 1$ das Polynom xy, welches auch linear unabhängig ist von den bereits erwähnten und somit auch ein Basiselement ist. Analog finden wir noch die zwei Polynome yz und xz. Diese Polynome sind alle linear unabhängig und spannen

Siehe nächstes Blatt!

den gewünschten Vekrorraum auf. Somit ist eine mögliche Basis von diesem Vektorraum

$$(x^2 - y^2, y^2 - z^2, xy, yz, xz);$$

der Vektorraum ist also fünfdimensional.

5. Mit dem Hinweis erhalten wir: Für jedes zweimal stetig differenzierbare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0, f'(0) = 0$ und $f(x) + f''(x) = 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$.

Sei nun $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ ist } C^2 \text{ und} f + f'' = 0\}$ und sei $f \in V$. Seien $a = f(0)$ und $b = f'(0)$. Sei nun $g(x) = f(x) - a\cos(x) - b\sin(x)$. Es gilt $g(0) = 0, g'(0) = 0$ und $g \in V$ da $\sin(x), \cos(x) \in V$. Also gilt $g(x) = 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. Somit gilt $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$. Jedes Element in V lässt sich also als Linearkombination von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ darstellen. Diese sind linear unabhängig in V und bilden deshalb eine Basis von V. Somit ist V zweidimensional.