D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Lineare Algebra I HS 13
Tom Ilmanen

Musterlösung 8

1. Die Polynome t^2, t^2+t, t^2+1 und t^7+t^5 sind linear unabhängig. Das Polynom $t^2+t+1 = (t^2+t)+(t^2+1)-t^2$ lässt sich als Linearkombination der anderen schreiben. Demnach ist die Dimension von $\operatorname{Span}(t^2, t^2+t, t^2+1, t^2+t+1, t^7+t^5)$ gleich vier.

2. **a)** Der Raum der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist bezüglich der gewöhnlichen Addition und Multiplikation abgeschlossen und erfüllt offensichtlich die acht Vektorraumaxiome. Somit ist das Tripel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit den Abbildungen

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y,$$
$$\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$.

b) Wir betrachten für $a, b, c \in \mathbb{Q}$ die Linearkombination

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0. \tag{1}$$

Lösen wir diese Gleichung nach $-\sqrt{3}c$ auf und quadrieren sie anschliessend, so erhalten wir

$$a^2 + 2\sqrt{2}ab + 2b^2 = 3c^2.$$

Da a, b, c nach Annahme rational sind und das Quadrat einer rationalen Zahl auch rational ist, muss der Summand $2\sqrt{2}ab = 0$ sein, denn $\sqrt{2}$ ist bekanntlich irrational. Somit haben wir $ab = 0$. Lösen wir ganz analog die Gleichung (1) nach $-\sqrt{2}b$ auf und quadrieren sie wieder, finden wir mit dem gleichen Argument die Bedingung $ac = 0$. Zuletzt (wenn wir die Gleichung nach $-a$ auflösenen) erhalten wir noch $bc = 0$. Die drei Gleichungen $ab = 0$, $bc = 0$ und $ca = 0$ können aber nur erfüllt sein, wenn mindestens zwei der Variablen a, b, c null sind: Nehme zum Beispiel an, dass a und b nicht null sind. Dann ist auch $ab \neq 0$, was ein Widerspruch ist. Um zu zeigen, dass auch die dritte der Variablen a, b, c null ist, setzen wir in sie Gleichung (1) ein: Sei zum Beispiel $a = b = 0$. Dann folgt aus (1) sofort, dass $c\sqrt{3} = 0$, also $c = 0$. Damit haben wir die lineare Unabhängigkeit von $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$ gezeigt.

Bitte wenden!

c) Angenommen $\mathbb{R}$ hätte als $\mathbb{Q}$-Vektorraum eine endliche Basis, dann wäre $\mathbb{R}$ abzählbar, was ein Widerspruch ist.

Oder wir finden eine unendliche Folge in $\mathbb{R}$, welche über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig ist. Zum Beispiel die Folge $e, e^2, e^3, \ldots$.

3. **a)** $\nexists n \geq 0, \quad \exists v_1, \ldots, v_n \in V : \quad (v_1, \ldots, v_n)$ ist eine Basis von V.

b) $\nexists n \geq 0, \quad \exists v_1, \ldots, v_n \in V : \quad \text{Span}(v_1, \ldots, v_n) = V$.

c) $\forall n \geq 0 \quad \exists v_1, \ldots, v_n \in V \quad : v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

d) $\exists v_1, v_2, \ldots \in V : \quad \forall n \geq 0 \quad v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

Wir zeigen die Äquivalenz in der Reihenfolge d) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ d).

d) $\Rightarrow$ c): Diese Implikation ist trivial (Bemerkung: d) und c) sind nicht logisch äquivalent, da die Vektoren in c) von n abhängen dürfen).

c) $\Rightarrow$ b): Mit c) gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass es $n+1$ linear unabhängige Vektoren in V gibt. Somit kann kein erzeugendes System mit n Vektoren existieren.

b) $\Rightarrow$ a): Eine Basis ist auch ein erzeugendes System. Falls kein endliches erzeugendes System existiert, kann auch keine endliche Basis existieren.

a) $\Rightarrow$ d): Wir machen es induktiv: V hat keine endliche Basis, also ist die leere Menge $\emptyset$ sicher keine Basis von V. Für $n \geq 0$ nehmen wir an, $v_1, \ldots, v_n$ seien linear unabhängige Vektoren. Diese erzeugen V nicht, denn sonst wären sie eine endliche Basis von V. Also gibt es einen Vektor v_{n+1}, so dass $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ linear unabhängig sind. Die so konstruierte Folge $v_1, v_2, \dots \in V$ erfüllt die Bedingung.

4. **a)** Mit elementaren Zeilen- bzw. Spaltenoperationen erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit sind Zeilenrang wie auch Spaltenrang jeweils 2.

Siehe nächstes Blatt!

b) Es ist nicht schwer zu sehen, dass je zwei Spalten von A linear unabhängig sind. Da der Spaltenraum zweidimensional ist, bilden je zwei Spalten eine Basis davon. Eine Basis des Spaltenraumes ist also beispielsweise $\{(1,4,7), (2,5,8)\}$.

Ganz analog zeigt man, dass je zwei der drei gegebenen Zeilenvektoren den Zeilenraum aufspannen sowie dass diese linear unabhängig sind. Eine Basis des Zeilenraums ist also beispielsweise durch $\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ gegeben.

5. **a)** i) Für $u_0 = 1$ gilt $u_0' = u_0'' = 0$ und deshalb ist für $\lambda = 0$ die Gleichung erfüllt.

ii) Hier gilt $u_1 = x$, $u_1' = 1$ und $u_1'' = 0$. Eingesetzt in (H_λ) ergibt dies $-x + \lambda x = 0$, was für $\lambda = 1$ offensichtlich erfüllt ist.

iii) Für $u_2 = x^2 - 1$ gilt $u_2' = 2x$ und $u_2'' = 2$. Durch einsetzten in (H_λ) erhält man $2 - 2x^2 + \lambda x^2 - \lambda = 0$. Auch diese Gleichung ist für $\lambda = 2$ erfüllt.

b) Sei u eine Lösung von (H_λ), das heisst es gilt

$$u'' - xu' + \lambda u = 0.$$

Wir setzen nun $\tilde{u} := xu - u'$ in $(H_{\lambda+1})$ ein:

$$\begin{aligned}\tilde{u}'' - x\tilde{u}' + (\lambda+1)\,\tilde{u} &= (xu-u')'' - x\,(xu-u')' + (\lambda+1)\,(xu-u') \\ &= (u + xu' - u'')' - x\,(u + xu' - u'')\,(\lambda+1)\,(xu-u') \\ &= 2u' + xu'' - u''' - xu - x^2u' + xu'' + \lambda xu + xu - \lambda u' - u'\end{aligned}$$

Nun ersetzen wir $u''' = (u'')'$ durch $xu' - \lambda u$, indem wir benutzen, dass u die Gleichung (H_λ) erfüllt. Somit ist der Ausdruck von oben das selbe wie

$$2u' + xu'' - (xu' - \lambda u)' - xu + x\,(u'' - xu' + \lambda u) + xu - \lambda u' - u'.$$

Wir benutzen noch einmal, dass u die Gleichung (H_λ) erfüllt. Damit ist nämlich $x\,(u'' - xu' + \lambda u) = 0$ und der Ausdruck von oben ist gleich

$$\begin{aligned}2u' + xu'' - (xu' - \lambda u)' - xu + xu - \lambda u' - u' \\ = 2u' + xu'' - u' - xu'' + \lambda u' - \lambda u' - u' = 0.\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $\tilde{u} = xu - u'$ die Gleichung $(H_{\lambda+1})$ erfüllt.

c) Wähle $u_0 = 1$ und definiere für $n \geq 1$ rekursiv die Polynome

$$u_n = u_{n-1}x - u_{n-1}'.$$

Mit Induktion sieht man sofort, dass u_n ein Polynom vom Grad n mit Leitkoeffizient 1 ist. Insbesondere sind die Polynome $\{u_n : n = 0, 1, 2, ...\}$ linear unabhängig. Ausserdem haben wir in Teilaufgabe b) gesehen, dass u_n die Gleichung (H_λ) für $\lambda = n$ erfüllt.

Bitte wenden!

Es ist noch zu zeigen, dass diese Polynome den ganzen Raum aufspannen. Wir zeigen per Induktion nach k, dass x^k im Raum liegt, welcher von den Polynomen u_n aufgespannt wird. Für $k = 0$ ist die Aussage klar, da $x^0 = 1 = u_0$. Nehme nun an, dass $x^i \in \operatorname{Span}\{u_n : n = 0, 1, 2, ...\}$ für alle $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$. Wir wissen, dass u_k ein normiertes Polynom von Grad k ist, also

$$u_k(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Nun liegt nach Induktionsannahme aber

$$x^k = u_k(x) - a_{k-1}x^{k-1} - \cdots - a_1 x - a_0$$

ebenfalls in $\operatorname{Span}\{u_n : n = 0, 1, 2, ...\}$. Da $\{1, x, x^2, ...\}$ eine Basis von $\mathbb{R}[x]$ ist, sind wir fertig.