D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Lineare Algebra I HS 13
Tom Ilmanen

Musterlösung 9

1. **a)** Mit dem Gauss Algorithmus sehen wir, dass die vier Vektoren linear unabhängig sind. Somit ist eine mögliche Basis (v_1, v_2, v_3, v_4). Damit wir (wie in b) gefordert) besser die geeigneten Standardbasisvektoren finden, bietet es sich an, diese Basis etwas umzuschreiben, siehe dazu Teilaufgabe b).

b) Mit $v_1 - v_2 - v_4 = (0, 0 - 3, 0, 0)$ finden wir einen Vektor, der parallel zu $e_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$ ist; somit liegt e_3 in einer Basis von V. Analog sehen wir mit $2v_1 - v_3$, dass e_2 in dieser Basis liegt. Mit dem Gauss Algorithmus sehen wir, dass wir mit den Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 die Standardvektoren e_1, e_4 und e_5 nicht erzeugen können. Mit etwas Rechnen finden wir somit eine Basis von V bestehend aus den Vektoren $\tilde{v}_1 = (1, 0, 0, 1, 1)$, $\tilde{v}_2 = e_2$, $\tilde{v}_3 = e_3$ und $\tilde{v}_4 = (0, 0, 0, 1, -1)$. Somit können wir (um es zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$ zu ergänzen) die Vektoren e_1, e_4 oder e_5 dazunehmen.

c) In b) können wir sehen, dass es drei Möglichkeiten gibt.

2. Sei n die Dimension des Vektorraums V und p $(\leq n)$ die Dimension des Untervektorraums U_1. Sei $(b_1, \ldots, b_p)$ eine Basis von U_1. Mit dem Basisergänzungssatz können wir diese zu einer Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von V ergänzen. Sei nun $U_2 := \text{Span}(b_{p+1}, \ldots, b_n)$. Da diese Vektoren aus einer Basis von V sind, sind sie linear unabhängig und U_2 hat somit die Dimension $n - p$. Somit gilt für U_2

$$\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V).$$

Wir müssen nur noch zeigen, dass der konstruierte Untervektorraum U_2 komplementär zu U_1 ist. Nach Konstruktion gilt

$$U_1 + U_2 = V.$$

Sei nun $v \in U_1 \cap U_2$. Dann gilt

$$v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_p b_p = \mu_{p+1} b_{p+1} + \cdots + \mu_n b_n$$

und daraus folgt

$$\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_p b_p - \mu_{p+1} b_{p+1} - \cdots - \mu_n b_n = 0.$$

Bitte wenden!

Da $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V ist und damit insbesondere linear unabhängig, folgt, dass

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = \mu_{p+1} = \cdots = \mu_n = 0$$

gilt und somit ist $v = 0$. Also folgt $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Somit ist der konstruierte Untervektorraum U_2 komplementär zu U_1 und $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V)$.

3. Da $W_1, W_2 \subset W_1 + W_2$ gilt offenbar $\dim(W_1 + W_2) \geq \max\{\dim W_2, \dim W_1\}$. Andererseits ist die Dimension von $W_1 + W_2$ nach oben beschränkt durch die Dimension des übergeordneten Vektorraums $\mathbb{R}^{10}$ und die Summe der Dimensionen der beiden Unterräume: Letzteres gilt, da die Basis der Linearen Hülle der Summe der Vektorräume nicht mehr Elemente enthalten kann, als in den Basen der zwei Untervektorräumen schon enthalten sind. Formal ausgedrückt: Sei $\mathcal{B}_1 = \{a_1, \ldots, a_r\}$ eine Basis von W_1 und $\mathcal{B}_2 = \{b_1, \ldots, b_s\}$ eine Basis von W_2, dann ist $W_1 + W_2 = \mathrm{Span}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$. Also wird $W_1 + W_2$ von höchstens $|\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| = r + s$ Vektoren aufgespannt, d.h. $\dim(W_1 + W_2) \leq \dim W_1 + \dim W_2$.

Jetzt können wir mit der Dimensionsformel für Unterräume

$$\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

auch die Dimension von $W_1 \cap W_2$ bestimmen

Angewendet auf die Bedingungen erhält man

a) $(\dim(W_1 + W_2), \dim(W_1 \cap W_2)) \in \{(4,2), (5,1), (6,0)\}$,

b) $(\dim(W_1 + W_2), \dim(W_1 \cap W_2)) \in \{(7,5), (8,4), (9,3), (10,2)\}$,

c) $(\dim(W_1 + W_2), \dim(W_1 \cap W_2)) \in \{(p,q) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0} \mid p + q = r + s, \max\{r,s\} \leq p \leq \min\{10, r+s\}\}$.

4.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Durch Auflösen des Gleichungssystems $Ax = 0$ erhällt man $(1, -2, 1)^\top$ als Basis von $\mathrm{Kern}\, F_A$. Die Spaltenvektoren von A spannen $\mathrm{Im}\, F_A$ auf, und da A zwei linear unabhängige Spaltenvektoren besitzt gilt $\mathrm{Im}\, A = \mathbb{R}^2$, also ist die Standartbasis eine Basis von $\mathrm{Im}\, A$.
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $F_B : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$. Durch Auflösen des Gleichungssystems $Bx = 0$ erhällt man $(1, 0, 0, -1, -1)^\top, (0, 1, -1, -1, -1)^\top$ als Basis von

Siehe nächstes Blatt!

$\operatorname{Kern} F_B$. Die ersten beiden Spaltenvektoren lassen sich durch die letzten drei ausdrücken, und diese drei sind offensichtlich linear unabhängig. Also bilden die letzten drei Spaltenvektoren eine Basis von $\operatorname{Im} F_B$.

- $C = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}, F_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

  Sei zunächst $(a, b)^\top \neq 0$, $(c, d)^\top \neq 0$. Jedes $(x, y) \in \operatorname{Kern} F_C$ erfüllt

  $$0 = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} acx + ady \\ bcx + bdy \end{pmatrix} = (cx + dy) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

  Dies gilt genau dann wenn $cx + dy = 0 \Leftrightarrow (x, y)^\top \in L((d, -c)^\top)$ und somit $\operatorname{Kern} F_C = L((d, -c)^\top)$.
  Da $xc + dy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ jeden Wert in $\mathbb{R}$ annehmen kann folgt aus der obigen Gleichung $\operatorname{Im} F_C = L((a, b)^\top)$.
  Falls $(a, b)^\top = 0$ oder $(c, d)^\top = 0$, so ist $F_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Nullabbildung und wir erhalten $\operatorname{Kern} F_C = \mathbb{R}^2$ und $\operatorname{Im} F_C = \{0\}$.

5. Es bezeichne f_a die Abbildung aus der Aufgabe **a)**, f_b diejenige von **b)**, usw.

a) Die Abbildung f_a ist linear, denn

$$f_a(\lambda(x, y)) = (3\lambda x + 2\lambda y, -\lambda x - 2\lambda y/3) = \lambda(3x + 2y, -x - 2y/3) = \lambda f_a(x, y)$$

und

$$\begin{aligned} f_a(x, y) + f_a(u, v) &= (3x + 2y, -x - 2y/3) + (3u + 2v, -u - 2v/3) \\ &= (3(x + u) + 2(y + v), -(x + u) - 2(y + v)/3) \\ &= f_a(x + u, y + v) = f_a((x, y) + (u, v)). \end{aligned}$$

Da im Bild von f_a die zweite Koordinate genau $-1/3$ mal der ersten Koordinate ist, ist das Bild von f_a gegeben durch $\{(u, -u/3) \in \mathbb{R}^2 \mid u \in \mathbb{R}\}$, da sich offensichtlich jedes $u \in \mathbb{R}$ als $3x + 2y$ schreiben lässt. Also ist f_a nicht surjektiv. Die Funktion ist auch nicht injektiv, da der Kern $\{(v, -3v/2) \in \mathbb{R}^2 \mid v \in \mathbb{R}\}$ mehr als ein Element enthält.

b) Es lässt sich leicht nachprüfen, dass f_b linear ist. In Serie 2 haben wir gezeigt, dass f_b surjektiv ist. Das Bild ist also $\mathbb{R}$. Der Kern, das heisst die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ für die $x + y = 0$ gilt, ist die Gerade $(t, -t), t \in \mathbb{R}$. Mehrere Punkte werden auf Null abgebildet, also ist f_b nicht injektiv.

c) Die Abbildung f_c ist nicht linear, falls $b \neq 0$, denn $f_c(x) + f_c(y) = ax + b + ay + b = a(x + y) + 2b = f_c(x + y) + b \neq f(x + y)$. Falls $b = 0$, so ist f_c linear. Falls $a = 0$ ist, dann ist f_c konstant und deshalb nicht surjektiv. Das Bild von f_c ist in diesem Fall genau $\{b\}$. Falls a und b von null verschieden sind, ist f_c bijektiv. Der Kern ist $\{-\frac{b}{a}\}$ und das Bild ist $\mathbb{R}$.

Bitte wenden!

d) f_d ist nicht linear, denn $if_d(i) = i\bar{i} = -i^2 = 1 \neq -1 = f_d(i^2)$.

e) f_e ist linear, denn es gilt

$$\lambda f_e(x+iy) = \lambda\overline{(x+iy)} = \lambda(x-iy) = \overline{\lambda(x+iy)} = f_e(\lambda(x+iy))$$

Wobei wir beim dritten Gleichheitszeichen brauchen dass $\lambda \in \mathbb{R}$. Auch $f(x) + f(y) = f(x+y)$ lässt sich leicht nachprüfen. Die Abbildung ist bijektiv und hat somit Kern $\{0\}$ und Bild $\mathbb{R}^2$.

f) Die Elemente in $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ haben die Form $g(t) = a_g \cdot t$ mit $a_g \in \mathbb{R}$. Die Abbildung f_f bildet $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ auf $a_g \in \mathbb{R}$ ab: $f_f(g) = g(1) = a_g \cdot 1 = a_g$. Man sieht sofort, dass diese Abbildung linear ist. Für ein $b \in \mathbb{R}$ findet man genau ein Element h in $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ welches auf b abgebildet wird, nämlich $h(t) = b \cdot t$. Also ist f_f bijektiv, der Kern ist $\{0\} \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und das Bild ist ganz $\mathbb{R}$.

g) Auch diese Abbildung ist linear: Die Auswertung eines Polynoms an der Stelle 1 genau die Summe der Koeffizienten ist, und analog wie bei f_b zeigt man, dass dies in der Tat linear ist. Da die Elemente von $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alle in $\mathbb{R}[x]$ enthalten sind (siehe oben!), ist f_g sicher surjektiv. Allerdings ist f_g nicht injektiv, da z.B. $f_g(x^2 - x) = 1^2 - 1 = 0$ gilt. Der Kern von f_g besteht genau aus den Polynomen, die 1 als Nullstelle besitzen.

h) Es lässt sich leicht nachprüfen, dass f_h linear ist. Der Kern von f_h ist $\{0\}$, denn jedes andere Polynom wird auf ein Polynom abgebildet, welches nicht Null ist. Also ist f_h injektiv. Im Bild von f_h sind alle Polynome mit Grad ≤ 5, die sich als $(2 - 3x + x^2)p(x)$ darstellen lassen, wobei $p(x)$ ein Polynom von Grad ≤ 3 ist. Dies sind genau die Polynome in $\mathbb{R}^5$, die in 1 und 2 eine Nullstelle haben.

j) Die Linearität von f_j folgt sofort daraus, dass die Ableitung eine lineare Abbildung ist. Aus der Aufgabe 1c der Serie 2 wissen wir auch schon, dass f_j surjektiv, aber nicht injektiv ist. Es bleibt also nur noch der Kern zu bestimmen. Dieser ist offensichtlich durch die konstanten Polynome gegeben.

k) Man überprüft zuerst, dass $f_k(u) = u'$ wieder in V liegt: Es gilt $(u')'' + u' = (u'' + u)' = 0' = 0$. Die Linearität von f_k folgt nun aus der Linearität der Ableitung.

Der Kern von f_k besteht nur aus der Nullfunktion: Falls nämlich $u' = 0$ gilt, so auch $u'' = 0$, und die Bedingung $u'' + u = 0$ gibt nun $u = 0$. Also ist f_k injektiv. f_k ist auch surjektiv: Falls $u \in V$, dann gilt $u'' + u = 0$ und mit 2-maligen Ableiten auch $u'''' + u'' = 0$. Nun folgert man $u = -u'' = u''''$, also $f_k(u''') = u'''' = u$.