Serie 10

1. Seien V ein Vektorraum, $F : V \to V$ eine lineare Abbildung und $v \in V$, so dass es eine natürliche Zahl n gibt für die gilt:

$$F^n(v) \neq 0 \qquad \text{und} \qquad F^{n+1}(v) = 0.$$

Beweise, dass dann $v, F(v), \ldots, F^n(v)$ linear unabhängig sind.

2. Beweise, dass eine lineare Abbildung $F : V \to W$ zwischen Vektorräumen der gleichen Dimension $n < \infty$ genau dann surjektiv ist, wenn sie injektiv ist.

3. **a)** Es seien $F : V \to W$ eine lineare Abbildung und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Zeige, dass F genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ eine Basis von W ist.

b) Eine Eigenschaft gewisser Elemente in einer Menge M heisst *generisch in* M, wenn sie mit Wahrscheinlichkeit 100% auftritt und unter hinreichend kleinen Veränderungen erhalten bleibt. Eine solche Eigenschaft ist beispielsweise durch

“2 Geraden schneiden sich in einem Punkt”

in der Menge von Paaren von Geraden in der Ebene gegeben, da man durch zufälliges Zeichnen zweier Geraden fast nie parallele Geraden erhält, und sich durch leichtes “Wackeln” an den Geraden nichts an der Eigenschaft verändert (siehe auch Serie 1, Aufgabe 2).

Argumentiere so klar wie möglich, dass für endlich dimensionale Vektorräume V, W der gleichen Dimension und $M = \mathrm{Hom}(V, W)$ die Eigenschaft

“$F \in M$ ist ein Isomorphismus”

generisch ist.

4. Man stelle fest, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

a) Sei A eine $5{\times}4$-Matrix vom Zeilenrang 3. Dann besitzt $Ax = 0$ keine nichttriviale Lösung.

Bitte wenden!

b) Für A eine $n \times m$-Matrix, $b \in \mathbb{K}^n$ und $L = \{x \in \mathbb{K}^m \mid Ax = b\}$ gilt folgendes: $\{x \in \mathbb{K}^m \mid Ax = 0\} = \{x_1 - x_2 \mid x_1, x_2 \in L\}$.

c) Seien U_1, U_2, U_3 endlich-dimensionale Unterräume eines Vektorraumes V. Dann gilt die folgende Dimensionsformel:
$\dim(U_1 + U_2 + U_3) = \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3 - \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3)$.

d) Gegeben sei ein homogenes lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten, sodass alle zugehörigen inhomogenen Gleichungssysteme mindestens eine Lösung haben. Dann haben all diese Gleichungssysteme genau eine Lösung.

e) u, v, w sind linear abhängig $\Longleftrightarrow u \in \operatorname{Span}(v, w)$ oder $v \in \operatorname{Span}(u, w)$ oder $w \in \operatorname{Span}(u, v)$.

f) Es gibt keine vom Nullvektor verschiedene Linearkombination (x_1, x_2, x_3, x_4) der Vektoren $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}\right) \in \mathbb{R}^4$ und $\left(1, \pi, \pi^2, \pi^3\right) \in \mathbb{R}^4$, welche die Gleichung $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ erfüllt.

g) Als $\mathbb{Q}$-Vektorräume sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ isomorph.

5. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Man nennt eine lineare Abbildung $P : V \to V$ eine *Projektion*, falls $P^2 = P$. Zeige:

a) Der Kern und das Bild einer Projektion sind komplementär.

b) Seien die Untervektorräume $W_1, W_2 \subseteq V$ komplementär. Dann gibt es eine eindeutige Projektion $P : V \to V$ mit $\operatorname{Kern} P = W_1$, $\operatorname{Bild} P = W_2$.

Hinweis: Die Definition komplementärer Untervektorräume wurde in Serie 7, Aufgabe 3 gegeben.

Abgabe: Donnerstag, den 28. November 2013 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.