Serie 11

1. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme Basen u_1, u_2, v_1 von $\mathbb{R}^3$ und w_1, z_1 von $\mathbb{R}^2$, so dass $\operatorname{Kern} F = \operatorname{Span}(u_1, u_2)$, $\operatorname{Bild} F = \operatorname{Span}(w_1)$ und $F(v_1) = w_1$.

b) Gib für $x \in \operatorname{Bild} F$ eine Parametrisierung der Faser $F^{-1}(x) \subseteq \mathbb{R}^3$ an und zeige, dass jede nichtleere Faser $F^{-1}(x)$ genau einen Schnittpunkt mit dem Vektorraum $U := \operatorname{Span}(v_1)$ hat.

2. Sei U ein beliebiger Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Zeige: es gibt ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbestimmten, deren Lösungsmenge genau U ist.

3. (*Matlab*) In dieser Aufgabe geht es darum, sich etwas mit der Software Matlab vertraut zu machen. Sie ist auf den Studentenrechnern im HG installiert, kann aber auch via IDES[1] gratis bezogen werden.

a) Auf der Übungsseite befindet sich ein Tutorial zur Verwendung von Matlab. Arbeite dieses durch.

b) Auf der Übungsseite findest du auch ein Matlabskript. Verwende es zur Berechnung vom Rang, einer Basis des Spaltenraums, einer Basis des Zeilenraums und einer Basis des Kerns der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Skript verwendet allerdings noch die falsche Matrix. Modifiziere es so, dass es die richtige Matrix verwendet und gib den Quelltext sowie die Ausgabe ausgedruckt ab.

[1] `http://stud-ides.ethz.ch/`

4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Zeige:

a) Ist A eine Matrix über $\mathbb{R}$, so kann $\operatorname{Rang}(A)$ nur die Werte 0 und 2 annehmen.

b) Ist A eine Matrix über $\mathbb{C}$, so kann $\operatorname{Rang}(A)$ auch den Wert 1 annehmen.

5. **a)** Gegeben sind die zwei Basen $\mathcal{A} : v_1 = (0, -2, 4)$, $v_2 = (2, 0, 2)$, $v_3 = (2, 0, 4)$ und $\mathcal{B} : w_1 = (1, 0, 2)$, $w_2 = (0, 1, -3)$, $w_3 = (0, -1, 2)$ von $\mathbb{R}^3$. Man finde die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{Id})$ der Identitätsabbildung Id von $\mathbb{R}^3$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.

b) Es sei W die Ebene $x + y + z = 0$ und $F(x, y, z) = (y, z, x)$. Man berechne die Abbildungsmatrix von $F|_W : W \to W$ bezüglich der Basis $v_1 = (2, -2, 0)$, $v_2 = (1, 1, -2)$ von W.

c) Es sei P_m der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens m über $\mathbb{R}$. Man finde die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung $u \mapsto u'$ bezüglich der üblichen Basis $1, x, x^2, \ldots, x^m$ von P_m.

d) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die dazugehörige lineare Abbildung (eine Scherung). Zeige: Für jedes $\varepsilon \neq 0$ gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$, so dass

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt, aber keine Basis, so dass $M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt.

6. Seien V und W Vektorräume der Dimensionen n respektive m, $F : V \to W$ eine lineare Abbildung und r der Rang von F. Beweise, dass es dann Basen $\mathcal{A}$ von V und $\mathcal{B}$ von W gibt, so dass

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(F) = \left(\begin{array}{c|c} I^{r \times r} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

gilt, wobei $I^{r \times r}$ die $r \times r$-Identitätsmatrix bezeichne. Wieso widerspricht dies *nicht* der Aufgabe **5 d)**?

Abgabe: Donnerstag, den 5. Dezember 2013 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.