Serie 12

1. Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $F(x, y) = (x + 3y, 3x + y)$.

a) Finde eine Basis $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$ von $\mathbb{R}^2$, so dass die Abbildungsmatrix von F bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ die Form

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

hat und berechne B.

b) Finde eine 2×2 - Matrix T, die die Koordinaten eines Punktes bezüglich $\mathcal{B}$ wie folgt berechnet:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

wobei $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$ ein gegebener Punkt bezüglich der Standardbasis ist und $\binom{y_1}{y_2}$ die Koordinaten von $\binom{x_1}{x_2}$ bezüglich $\mathcal{B}$ sind.

c) Sei A die Abbildungsmatrix von F bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Verifiziere rechnerisch die Gleichung $B = TAT^{-1}$.

(Oder war das doch $B = T^{-1}AT$?!)

d) Erkläre das Ergebnis in **b)** auch theoretisch.

2. Betrachte den Endomorphismus $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, der bezüglich der kanonischen Basis durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

a) Verifiziere, dass $F^2 := F \circ F \neq 0$ und $F^3 := F \circ F \circ F = 0$.

b) Finde eine Basis u, v, w von $\mathbb{R}^3$ derart, dass $F(u) = v$, $F(v) = w$, $F(w) = 0$.

c) Bestimme die Abbildungsmatrix von F bezüglich der Basis u, v, w.

Bitte wenden!

3. Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Zeige: Falls $AB = BA$ für alle $n \times n$ - Matrizen B gilt, so ist A ein skalares Vielfaches der $n \times n$ - Einheitsmatrix.

4. **a)** Man beweise: Für $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt

$$\operatorname{Rang} A + \operatorname{Rang} B - n \leq \operatorname{Rang} AB \leq \min(\operatorname{Rang} A, \operatorname{Rang} B)$$

b) Man gebe zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{6 \times 6}$ explizit an, welche die folgenden Eigenschaften haben: $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} B = 3, AB = 0$.

c) Kann $\operatorname{Rang}(AB) = \min(\operatorname{Rang} A, \operatorname{Rang} B)$ erreicht werden, für den Fall $\operatorname{Rang} A \neq \operatorname{Rang} B$?

5. **a)** Eine Matrix A heisst *nilpotent*, falls $A^k = 0$ für ein $k > 0$. Zeige: Eine nilpotente 2×2-Matrix hat die Form $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bezüglich einer geeigneten Basis. Insbesondere ist $A^2 = 0$.
Hinweis: Serie 10, Aufgabe 1 kann nützlich sein.

b) Eine Matrix A heisst *idempotent*, falls $A^2 = A$. Zeige: Eine idempotente 2×2-Matrix hat die Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bezüglich einer geeigneten Basis.

6. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Betrachte die Menge

$$X(\mathbb{K}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{K} \right\},$$

ausgestattet mit der üblichen Addition und Multiplikation von $\mathbb{K}^{2 \times 2}$. Offensichtlich ist $X(\mathbb{K})$ abgeschlossen unter diesen Operationen. Somit ist $X(\mathbb{K})$ ein Ring und sogar eine Algebra.

a) Zeige: $X(\mathbb{R})$ ist isomorph zu $\mathbb{C}$.

b) Ist $X(\mathbb{C})$ kommutativ? Hat $X(\mathbb{C})$ Nullteiler? Gibt es für alle Elemente in $X(\mathbb{C})$ ein multiplikatives Inverses?

c)* Zeige: Wird $\mathbb{K}$ so gewählt, dass auch $X(\mathbb{K})$ wieder ein Körper ist, so ist $X\big(X(\mathbb{K})\big)$ kein Körper.

Abgabe: Donnerstag, den 12. Dezember 2013 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.