Serie 13

1. Zeige, dass
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
genau dann invertierbar ist, wenn $ad - bc \neq 0$ und zeige, dass die Inverse in diesem Fall gegeben ist durch
$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2. Die *Spur* und die *Determinante* einer 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sind definiert durch
$$\operatorname{tr}(A) := a + d \quad \text{und} \quad \det(A) := ad - bc.$$

a) Zeige, dass für jede 2×2-Matrix eine Abhängigkeitsrelation
$$(\dagger) \qquad A^2 = \lambda I + \mu A$$
gilt, wobei λ und μ von $\operatorname{tr}(A)$ und $\det(A)$ abhängen.

b) Drücke $\operatorname{tr}(A^2)$ durch $\operatorname{tr}(A)$ und $\det(A)$ aus.

c) Es sei $\operatorname{Alg}(A)$ der Untervektorraum, der von $A, A^2, A^3, \ldots$ aufgespannt wird. Offenbar ist $\operatorname{Alg}(A)$ eine Algebra (da abgeschlossen bezüglich der Matrizenmultiplikation) und hat nach Aufgabe **a)** höchstens Dimension 2.

Welche Matrizen A führen zu einem Raum $\operatorname{Alg}(A)$ der Dimension 1?

3. Es sei
$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$$
die Algebra der *Quaternionen* in $\mathbb{C}^{2\times 2}$. Eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{H}$ ist gegeben durch die Elemente
$$\mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

a) Überprüfe die folgenden Relationen:

$$\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2 = \mathbf{K}^2 = -\mathbb{1},$$

$$\mathbf{IJ} = -\mathbf{JI} = \mathbf{K}, \qquad \mathbf{JK} = -\mathbf{KJ} = \mathbf{I}, \qquad \mathbf{KI} = -\mathbf{IK} = \mathbf{J}.$$

b) Für $A = t\mathbb{1} + x\mathbf{I} + y\mathbf{J} + z\mathbf{K}$ mit $t, x, y, z \in \mathbb{R}$ seien

$$\widetilde{A} := t\mathbb{1} - x\mathbf{I} - y\mathbf{J} - z\mathbf{K}, \qquad |A| := \sqrt{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Zeige:

$$\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}, \qquad |AB| = |A||B|, \qquad A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|^2\mathbb{1}.$$

c) Berechne A^{-1} für $A \neq 0$.

d) Finde alle Lösungen der Gleichung $A^2 = -\mathbb{1}$ in $\mathbb{H}$.

4. Für je zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ ergibt der *Euklidsche Algorithmus* als Resultat zwei weitere ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$, so dass

$$xa + yb = \mathrm{ggT}(a, b)$$

gilt. Es bezeichne $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ den Ring der ganzen Zahlen modulo n, d.h. "Rechnen bis auf Vielfache von n".

a) Beweise, dass a genau dann in $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ invertierbar ist, wenn $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ gilt, und in diesem Fall ist $a^{-1} = x$ (in $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$).

b) Zeige, dass $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/26\mathbb{Z})^{2\times 2}$ genau dann invertierbar ist, wenn $ad - bc$ in $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$ invertierbar ist, und in diesem Fall ist die Inverse durch die übliche Formel gegeben. *Hinweis:* Die Determinante ist multiplikativ.

c) (*Matlab*) Die Matlabfunktion `[d,x,y] = gcd(a,b)` berechnet die Zahlen $d = \mathrm{ggT}(a, b), x, y$, die (†) erfüllen. Verwende diese Funktion, um eine Matlabfunktion `invert(A)` zu schreiben, die die Inverse einer 2×2-Matrix A in $(\mathbb{Z}/26\mathbb{Z})^{2\times 2}$ zurückgibt oder sagt, dass es keine gibt.

5. Gegeben seien reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$. Sei $C = (c_{ij})$ die $m \times n$-Matrix mit $c_{ij} = a_i b_j$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

a) Welche Werte kann $\mathrm{Rang}(C)$ annehmen?

b) Berechne Kern und Bild von C.

Abgabe: Donnerstag, den 19. Dezember 2013 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.