Serie 2

1. Untersuche die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$,

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y)$,

c) Sei $\mathcal{P}$ die Menge der Polynome mit reellen Koeffizienten. Betrachte die Ableitung:

$$\begin{aligned} f_3 : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ p &\longmapsto p'. \end{aligned}$$

2. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Beweise oder widerlege!

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A \subset X$ sowie $B \subset Y$.

a) $A \subset f^{-1}(f(A))$,

b) $A = f^{-1}(f(A))$,

c) f injektiv $\Rightarrow A = f^{-1}(f(A))$,

d) $B \supset f(f^{-1}(B))$,

e) $B = f(f^{-1}(B))$,

f) f surjektiv $\Rightarrow B = f(f^{-1}(B))$.

3. Für eine endliche Menge X bezeichne $|X|$ die Anzahl der Elemente von X. Es seien A, B Mengen mit $|A| = 5$ und $|B| = 8$. Bestimme

a) die Anzahl der injektiven Abbildungen $f : A \to B$,

b) die Anzahl der surjektiven Abbildungen $g : B \to A$.

4. Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen und $g \circ f : X \to Z$ die Komposition von f und g. Dann gilt

a) Sind f und g injektiv (surjektiv), so ist auch $g \circ f$ injektiv (surjektiv)

b) Ist $g \circ f$ injektiv (surjektiv), so ist auch f injektiv (g surjektiv)

Bitte wenden!

5. Bestimme die allgemeine Lösung des reellen homogenen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrl} 1\,x_1 & +\;\;3\,x_2 & -\;\;4\,x_3 = & 0 \\ 3\,x_1 & +\;\;7\,x_2 & -\;\;2\,x_3 = & 0 \\ 6\,x_1 & +16\,x_2 & -14\,x_3 = & 0. \end{array}$$

6. Bestimme alle komplexen Zahlentripel (a, b, c), für welche das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} & & ay & + & bz & = & 0 \\ ax & & & + & cz & = & 0 \\ bx & + & cy & & & = & 0 \end{array}$$

nur die triviale Lösung hat.

Abgabe: Donnerstag, den 03. Oktober 2013 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.