Serie 3

1. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und seien $A, B \subset X$ und $C, D \subset Y$. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen:

a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

c) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

d) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

e) Durch Hinzufügen welcher Bedingungen (injektiv oder surjektiv) kann man die falsche(n) Aussage(n) reparieren?

2. In der Vorlesung wurde das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & = & -3 \\ -2x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 5 \end{array}$$

gelöst. Dabei wurde die Lösungsmenge durch die folgende Abbildung parametrisiert:

$$\begin{aligned} \Phi \quad : \quad \mathbb{R}^2 \quad &\longrightarrow \quad \text{Lös}(A, b) \subset \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad &\longmapsto \quad \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a) Warum wissen wir nun, das Φ surjektiv ist?

b) Beweise, dass Φ auch injektiv ist.

Bitte wenden!

3. Sei (I) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

und sei (H) das assoziierte homogene Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Zeige die folgenden Aussagen:

a) Die Differenz zweier Lösungen von (I) ist eine Lösung von (H).

b) Die Summe einer Lösung von (I) und einer Lösung von (H) ist wieder eine Lösung von (I).

4. **a)** Finde alle Lösungen des homogenen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 3\,x_2 - 4\,x_3 + 3\,x_4 &= 0 \\ 3\,x_1 + 9\,x_2 - 2\,x_3 - 11\,x_4 &= 0 \\ 4\,x_1 + 12\,x_2 - 6\,x_3 - 8\,x_4 &= 0 \\ 2\,x_1 + 6\,x_2 + 2\,x_3 - 14\,x_4 &= 0. \end{aligned}$$

b) Benutze a), um die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 3\,x_2 - 4\,x_3 + 3\,x_4 &= 9 \\ 3\,x_1 + 9\,x_2 - 2\,x_3 - 11\,x_4 &= -3 \\ 4\,x_1 + 12\,x_2 - 6\,x_3 - 8\,x_4 &= 6 \\ 2\,x_1 + 6\,x_2 + 2\,x_3 - 14\,x_4 &= -12. \end{aligned}$$

zu finden.

Hinweis: Der Vektor $(-3, 0, -3, 0)^T$ ist eine Lösung von diesem Gleichungssystem.

Abgabe: Donnerstag, den 10. Oktober 2013 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.