Tom Ilmanen

Serie 4

1. Sind die folgenden Mengen (ausgestattet mit den üblichen Operationen) Vektorräume? Beweise oder widerlege!

a) Die Menge der Polynome mit reellen Koeffizienten,

b) die Menge der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad 4,

c) die Menge der Polynome mit reellen Koeffizienten, so dass $x = \frac{7}{2}$ eine Nullstelle ist,

d) $V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f + f'' = 0\}$,

e) $W_0 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$,

f) $W_7 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 7\}$,

g) die leere Menge $\varnothing$.

2. Sei V ein reeller Vektorraum. Zeige, dass für jedes $x \in V$ gilt:

a) Es gibt genau ein $(-x) \in V$ mit $x + (-x) = 0$,

b) $(-1) \cdot x = (-x)$,

c) $n \cdot x = \underbrace{x + \ldots + x}_{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

3. **a)** Bestimme Real- und Imaginärteil der folgenden Ausdrücke

i) $1/(1 + 2i)$,
ii) $(\overline{5 + 3i})/(1 - i)$,
iii) $5e^{\pi i/6}$.

b) Bestimme die Mengen der Punkte der komplexen Ebene, die die folgenden Bedingungen erfüllen und stelle sie graphisch dar.

i) $|z| \leq 1$,

Bitte wenden!

ii) $0 \leq \mathrm{Im}(z) < 2$,

iii) $z^6 = 1$,

iv) $|(z-i)/(z-2i)| < 1$,

v) $0 \leq \mathrm{Re}(z^2) < 1$.

c) Stelle $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 1 + i/2$ in Polarkoordinaten dar. Multipliziere z_1 und z_2 miteinander und zwar einmal normal und einmal in Polarform. Illustriere graphisch was passiert.

4. Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume des angegebenen Vektorraums?

a) $\{(0, x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$,

b) $\{(x^3, x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$,

c) $\{(x, x+y, x-y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$,

d) $\{(x^4 - y^4, 0, 0, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$,

e) $\{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$,

f) $\{(a, b, a, b) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 = b^2, a \cdot b \leq 0\} \subset \mathbb{R}^4$,

g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 + z^2 = 0, x - y + z = 0, x + y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$,

h) $\{\ln\left(\frac{p}{q}\right) \mid p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$.

Abgabe: Donnerstag, den 17. Oktober 2013 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.