Serie 6

1. Sei $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ ein Körper mit drei Elementen.

a) Gib einen Körper mit 9 Elementen an und bestimme die Additions- und Multiplikationstabellen.

b) Finde ein Polynom $P(X)$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{F}_3$, so dass $P(X) = 0$ eine Lösung in $\mathbb{F}_9$ hat, aber keine in $\mathbb{F}_3$.

2. Gegeben sind die vier Polynome

$$p_1(x) = x^3 + x^2,\ p_2(x) = x^2 - 2x - 4,\ p_3(x) = 3x + 4,\ p_4(x) = 2x + 3.$$

a) Man schreibe das Polynom $2x^3 + 3x^2 - 1$ als Linearkombination der Polynome p_1, p_2, p_3, p_4.

b) Berechne die lineare Hülle $\mathrm{Span}(p_1, p_2, p_3, p_4)$.

3. Zeige, dass $\sin$ und $\cos$ linear unabhängig sind. In welchem Vektorraum V arbeitest du?

4. Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

a) $(1, 0, 0, 1),\ (2, 3, -3, 9),\ (1, 3, -4, 7),\ (2, 0, 1, 3)$

b) $(1, 2, 3, 4),\ (-3, 4, 2, 8),\ (-3, 9, 1, 3)$

c) $1 + i$, $1 - i$, wobei $\mathbb{C}$ als zweidimensionaler *reeller* Vektorraum aufgefasst wird

d) $1 + i$, $1 - i$, wobei $\mathbb{C}$ als eindimensionaler *komplexer* Vektorraum aufgefasst wird

e) $\sin(x),\ \sin(x + 1),\ \sin(x + 2)$

Bitte wenden!

f) $\sin(0x),\ \sin(1x),\ \sin(2x)$

g) $1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$

h) $\{\varphi_n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$, wobei $\varphi_n(x) := 1/(x+n),\ x \neq \{0, -1, -2, ...\}$.

5. a) Finde zwei linear unabhängige Vektoren in der Ebene $x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0$ in $\mathbb{R}^3$.

b) Finde zwei linear unabhängige Vektoren in der Ebene $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ in $\mathbb{R}^3$, wobei $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. (Fallunterscheidung!)

Abgabe: Donnerstag, den 31. Oktober 2013 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.