Serie 7

1. **a)** Betrachte die Vektoren

$$(1,1,0,1,1),\ (0,0,1,1,0),\ (0,1,0,0,0),\ (1,0,0,1,1),\ (1,0,1,0,1).$$

Was ist die Dimension deren linearer Hülle in $\mathbb{R}^5$?

b) Interpretiere nun die obigen Vektoren als Vektoren in $\mathbb{F}_2^5$, wobei $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ der Körper mit zwei Elementen ist. Was ist jetzt die Dimension deren linearer Hülle?

2. Sei W der Untervektorraum aufgespannt von den Vektoren $v_1 = (1,2,1,2)$, $v_2 = (0,0,-1,1)$, $v_3 = (1,4,2,3)$ und $v_4 = (0,2,1,1)$.

a) Bestimme ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge W ist.

b) Wähle aus v_1, v_2, v_3, v_4 alle möglichen Basen von W aus. Wieviele sind es?

3. Sei W die Lösungsmenge der Gleichung

$$x + 2y - 3z = 0.$$

a) Bestimme eine Basis $\mathcal{B}$ von W.

b) Berechne die Koordinaten von $(1,1,1) \in W$ bezüglich $\mathcal{B}$.

c) Berechne explizit die Parametrisierung

$$P_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^2 \to W,$$

die $\mathcal{B}$ entspricht.

d) Berechne explizit die Koordinatenabbildung

$$K_{\mathcal{B}} : W \to \mathbb{R}^2,$$

die $\mathcal{B}$ entspricht.

Bemerkung: Die Richtigkeit der Antwort auf die Teilaufgabe **b)** lässt sich in den Teilaufgaben **c)** und **d)** verifizieren und bestätigen.

Bitte wenden!

4. Bestimme eine Basis und die Dimension der folgenden Vektorräume:

a) $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$, wobei $v_1 = (1, 3, 4, 0, 1)$, $v_2 = (2, 5, 6, -2, 1)$, $v_3 = (1, 5, 8, 4, 3)$,

b) Die Lösungsmenge in $\mathbb{R}^3$ von

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & & & + & 3z & = & 0, \end{array}$$

c) $\{0\}$,

d) $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x + iy = 0\}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$,

e) $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x + iy = 0\}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$,

f) Der Raum der homogenen, harmonischen Polynome vom Grad 2 auf $\mathbb{R}^3$, wobei ein *homogenes Polynom vom Grad* 2 eine Funktion der Form

$$u(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx, \qquad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

ist. Eine Funktion heisst *harmonisch*, falls

$$\Delta u(x, y, z) := \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial z^2} = 0.$$

5. Bestimme eine Basis und die Dimension des Vektorraums

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } C^2 \text{ und } f + f'' = 0\}.$$

Hinweis: "f ist C^2" heisst, dass f, f', f'' existieren und stetig sind.

Folgender Satz aus der Analysis darf verwendet werden: $f \equiv 0$ ist die einzige C^2-Lösung von

$$f + f'' = 0, \qquad f(0) = f'(0) = 0.$$

Abgabe: Donnerstag, den 7. November 2013 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.