D-MATH, D-PHYS, D-CHAB Lineare Algebra I HS 13
Tom Ilmanen

Serie 8

1. Bestimme die Dimension von $\mathrm{Span}(t^2, t^2+t, t^2+1, t^2+t+1, t^7+t^5)$ im Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten.

2. Zeige:

a) $\mathbb{R}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$,

b) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ sind linear unabhängig über $\mathbb{Q}$,

c) $\mathbb{R}$ ist unendlichdimensional als Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

3. Drücke folgende Aussagen durch Quantoren aus und beweise ihre Äquivalenz:

a) V hat keine endliche Basis,

b) V hat kein endliches Erzeugendensystem,

c) V hat endliche Folgen beliebiger Länge von linear unabhängigen Vektoren,

d) Es gibt eine unendliche Folge von Vektoren $v_1, v_2, \dots \in V$, so dass jede endliche Teilfolge $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig ist.

Was ist der Unterschied zwischen **c)** und **d)**?

4. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme den Spaltenrang und den Zeilenrang von A.

b) Bestimme eine Basis für den Spaltenraum und den Zeilenraum von A.

Bitte wenden!

5. *(Hermit'sche Polynome)* Sei $\mathbb{R}[x]$ der Raum der Polynome in x mit reellen Koeffizienten. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Basis

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2 - 1, \dots\}$$

von $\mathbb{R}[x]$ zu konstruieren, so dass jedes Basiselement $u \in \mathcal{B}$ eine polynomielle Lösung der Hermit'schen Gleichung

$$(H_\lambda) \qquad u'' - xu' + \lambda u = 0$$

für ein $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ist. Gehe dazu wie folgt vor:

a) Verifiziere, dass

i) $u_0 = 1$,
ii) $u_1 = x$,
iii) $u_2 = x^2 - 1$

Lösungen von (H_λ) für $\lambda = 0, 1, 2$ sind.

b) Zeige: Ist u eine Lösung von (H_λ), so ist $xu - u'$ eine Lösung von $(H_{\lambda+1})$. (Die Abbildung $u \mapsto xu - u'$ heisst in der Quantenphysik *Erzeugungs*- oder *Aufstiegsoperator*.)

c) Konstruiere Lösungen $u_\lambda = x^\lambda + \dots$ von (H_λ) mit $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ durch eine Rekursionsformel und zeige, dass u_0, u_1, $u_2, \dots$ eine Basis von $\mathbb{R}[x]$ ist.

Abgabe: Donnerstag, den 14. November 2013 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.