Serie 9

1. Gegeben seien in $\mathbb{R}^5$ die Vektoren

$$v_1 = (2, 1, -1, 3, 1)\,,\ v_2 = (1, -1, 3, 1, 1)\,,\ v_3 = (4, 0, -2, 6, 2)\,,\ v_4 = (1, 2, -1, 2, 0)\,.$$

a) Finde eine Basis für $V := \mathrm{Span}\,(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

b) Ergänze diese Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$ durch Hinzunahme von geeigneten Standardbasisvektoren.

c) Auf wieviele Arten kann man **b)** lösen?

2. Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum. Die Untervektorräume U_1 und U_2 von V heissen *komplementär*, falls $U_1 + U_2 = V$ und $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Beweise: Zu jedem Untervektorraum U_1 von V gibt es einen komplementären Untervektorraum U_2 und es gilt $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V)$.

3. Es seien W_1, W_2 Untervektorräume von $\mathbb{R}^{10}$. Es gelte

a) $\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 4$,

b) $\dim W_1 = 5$, $\dim W_2 = 7$,

c) $\dim W_1 = r$, $\dim W_2 = s$.

Welche Zahlenpaare (p, q) können als Dimensionen der Räume $W_1 \cap W_2$ und $W_1 + W_2$ unter diesen Bedingungen auftreten?

4. Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch die folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Bestimme jeweils Basen von $\mathrm{Kern}\, F$ und $\mathrm{Bild}\, F$.

Bitte wenden!

5. Untersuche, ob folgende Abbildungen linear sind. Falls ja, untersuche sie auf Injektivität und Surjektivität und bestimme ihr Kern und Bild.

a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (3x+2y, -x-2y/3),$

b) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x+y,$

c) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax+b,$ wobei $a, b \in \mathbb{R}$,

d) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \bar{z},$

e) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \bar{z}$ (über $\mathbb{R}$),

f) $\mathrm{Hom}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto u(1),$

g) $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto u(1),$

h) $P_3 \to P_5, \quad p(x) \mapsto (2-3x+x^2)p(x),$

j) $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad u \mapsto u',$

k) $V \to V, \quad u \mapsto u',$ wobei $V := \{u : u'' + u = 0\}$.

Hinweis: $\mathrm{Hom}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist der Vektorraum der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}[x]$ der Polynomring in einer Unbestimmten über $\mathbb{R}$, und P_k bezeichnet den Untervektorraum von $\mathbb{R}[x]$ der Polynome mit Grad höchstens k.

Abgabe: Donnerstag, den 21. November 2013 am Anfang der Übungsstunde oder vor 10:00 Uhr im Fächlein im HG J 68.