Löesungen SS 12

1. (a) Durch Erweitern findet man

$$\begin{aligned} z &= \frac{4-8i}{3+4i} = \frac{4-8i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} \\ &= \frac{12-16i-24i-32}{9+16} = \frac{-20-40i}{25} \\ &= -\frac{4}{5} - \frac{8}{5}i \;. \end{aligned}$$

Somit folgt $\Re(z) = -\frac{4}{5}$ und $\Im(z) = -\frac{8}{5}$.

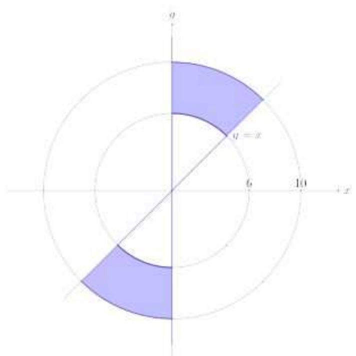
(b)

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \arg\left((1+i)^2\right) & \leq & \arg(z^2) & \leq & \arg(-7) \\ \left|\frac{1+2\sqrt{2}i}{e^{i\pi}}\right| & \leq & \left|\frac{z}{(1+i)^2}\right| & \leq & |3+4i| \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} 2 \cdot \frac{\pi}{4} & \leq & \arg(z^2) & \leq & \pi \\ \sqrt{1+8} & \leq & \frac{|z|}{2} & \leq & \sqrt{9+16} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} 2 \cdot \frac{\pi}{4} & \leq & 2\arg(z) & \leq & \pi \\ 6 & \leq & |z| & \leq & 10 \end{array} \right. \quad \text{oder} \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} 2 \cdot \frac{\pi}{4} & \leq & 2\arg(z) - 2\pi & \leq & \pi \\ 6 & \leq & |z| & \leq & 10 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} \frac{\pi}{4} & \leq & \arg(z) & \leq & \frac{\pi}{2} \\ 6 & \leq & |z| & \leq & 10 \end{array} \right. \quad \text{oder} \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} \frac{5\pi}{4} & \leq & \arg(z) & \leq & \frac{3\pi}{2} \\ 6 & \leq & |z| & \leq & 10 \end{array} \right.$$



[6Punkte]

2. (a) Nach Bernoulli de l'Hôspital gilt

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sin \pi x} \overset{'\frac{0}{0}'}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\pi \cos \pi x} = \frac{1}{\pi \cdot (-1)} = -\frac{1}{\pi} \ .$$

(b) Variante 1: Nach der Kettenregel und der Produktregel gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin(\sin(x)) \cdot \cos(x) \ , \\
f''(x) &= -\cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)^2 + \sin(\sin(x)) \cdot \sin(x) \ , \\
f'''(x) &= \sin(\sin(x)) \cdot \cos(x)^3 + \cos(\sin(x)) \cdot 2\cos(x)\sin(x) \\
&\quad + \cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)\sin(x) + \sin(\sin(x)) \cdot \cos(x) \\
&= \sin(\sin(x)) \left[\cos(x)^3 + \cos(x)\right] + 3\cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)\sin(x) \ , \\
f''''(x) &= \cos(\sin(x)) \cdot \left[\cos(x)^4 + \cos(x)^2\right] - \sin(\sin(x)) \left[3\cos(x)^2\sin(x) + \sin(x)\right] \\
&\quad -3\sin(\sin(x)) \cdot \cos(x)^2\sin(x) + 3\cos(\sin(x)) \cdot \left[-\sin(x)^2 + \cos(x)^2\right] \\
&= \cos(\sin(x)) \cdot \left[\cos(x)^4 + 4\cos(x)^2 - 3\sin(x)^2\right] \\
&\quad - \sin(\sin(x)) \cdot \left[6\cos(x)^2\sin(x) + \sin(x)\right] \ .
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$f(0) = 1 \ , f'(0) = 0 \ , f''(x) = -1 \ , f'''(0) = 0 \ , f''''(x) = 1 \cdot [1+4] = 5 \ .$$

Das Taylorpolynom vierter Ordnung der Funktion $f(x) = \cos(\sin(x))$ um $x_0 = 0$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
T_f^4(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4 \\
&= 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{5}{24} \cdot x^4 \ .
\end{aligned}$$

Variante 2: Die Potenzreihen von Sinus und Cosinus sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots \ , \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots \ .
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\cos(\sin x) &= 1 - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots\right)^4}{4!} \mp \ldots \\ &= 1 - \frac{x^2}{4} + 2 \cdot \frac{x^4}{12} + \frac{x^4}{24} + O(x^6) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{5}{24} \cdot x^4 + O(x^6)\ .\end{aligned}$$

Somit ist das Taylorpolynom vierter Ordnung der Funktion $f(x) = \cos(\sin(x))$ um $x_0 = 0$ gegeben durch

$$T_f^4(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{5}{24} \cdot x^4\ .$$

[6 Punkt]

3. Die Bogenlänge L des Graphen von einer Funktion $f(x)$ über das Intervall $[a, b]$ ist gegeben durch

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\ .$$

Betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \int_e^x \underbrace{\sqrt{\ln^2 t - 1}}_{=:g(t)}\, dt\ .$$

Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung gilt

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(G(x) - G(e)\right) = \frac{d}{dx} G(x) = g(x)\ ,$$

wobei G eine Stammfunktion von g ist.

Somit ist die Bogenlänge des Graphen von f über das Intervall $[e, e^3]$ gegeben durch das Integral

$$
\begin{aligned}
L &= \int_e^{e^3} \sqrt{1+(\sqrt{\ln^2 x - 1})^2}\, dx \\
&= \int_e^{e^3} \sqrt{1+\ln^2 x - 1}\, dx \\
&= \int_e^{e^3} \ln x \, dx \\
&= x(\ln x - 1)|_e^{e^3} \\
&= e^3(\ln(e^3) - 1) = 2e^3 \ .
\end{aligned}
$$

[*6 Punkte*]

4. (a) Zweimal partielle Integration liefert

$$
\begin{aligned}
\int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow} \underbrace{\sin(6x)}_{\downarrow}\, dx &= -\frac{e^{-2x}}{2}\sin(6x) + 3\int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow} \underbrace{\cos(6x)}_{\downarrow}\, dx \\
&= -\frac{e^{-2x}}{2}\sin(6x) - \frac{3e^{-2x}}{2}\cos(6x) - 9\int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow} \underbrace{\sin(6x)}_{\downarrow}\, dx \ .
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
10\int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow} \underbrace{\sin(6x)}_{\downarrow}\, dx &= -\frac{e^{-2x}}{2}\sin(6x) - \frac{3e^{-2x}}{2}\cos(6x) + c \\
\int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow} \underbrace{\sin(6x)}_{\downarrow}\, dx &= -\frac{e^{-2x}}{20}\sin(6x) - \frac{3e^{-2x}}{20}\cos(6x) + \tilde{c} \ .
\end{aligned}
$$

[*2 Punkt*]

(b) Mit der Substitution $\sqrt{x-1} = u$, $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx = du$ folgt es

$$
\begin{aligned}
\int_2^4 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\, dx &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{u^2+1} du \\
&= [2\arctan u]\,|_1^{\sqrt{3}} \\
&= 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6} \ .
\end{aligned}
$$

[2 Punkt]

(c) Variante 1:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx &= \int \frac{3x^2-2x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx - \int \frac{5x}{x^3-x^2-2x}\,dx \\ &= \ln(|x^3-x^2-2x|) - 5\int \frac{1}{x^2-x-2}\,dx\ .\end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung $\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}=\frac{1}{x^2-x-2}$ liefert das Gleichungssystem

$$\begin{cases} A+B &= 0\ , \\ -2A+B &= 1\ . \end{cases}$$

Daraus ergibt sich $A=\frac{-1}{3}$ und $B=\frac{1}{3}$.
Somit folgt:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx &= \ln(|x^3-x^2-2x|) - 5\left[\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx\right] \\ &= \ln(|x^3-x^2-2x|) - \frac{5}{3}\ln(|x-2|) + \frac{5}{3}\ln(|x+1|) + c\ .\end{aligned}$$

Variante 2: Direkt mit Partialbruchzerlegung:

$$\frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}\ .$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$\begin{cases} A+B+C &= 3\ , \\ -A+B-2C &= -7\ , \\ -2A &= -2\ . \end{cases}$$

Aus der dritten Gleichung folgt sofort, dass $A=1$. Das System reduziert sich auf $\begin{cases} B+C &= 2\ , \\ B-2C &= -6\ , \end{cases}$ die $B=2-C$ impliziert. Somit folgt $2-C-2C=-6 \quad \Rightarrow C=\frac{8}{3}, B=\frac{-2}{3}$.
Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{8}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \ln(|x|) - \frac{2}{3}\ln(|x-2|) + \frac{8}{3}\ln(|x+1|) + c\ .\end{aligned}$$

[3 Punkt]

Bemerkung: Variante 1 und 2 ergeben das gleiche Resultat, weil es gilt

$$\begin{aligned}
& \ln(|x^3 - x^2 - 2x|) - \frac{5}{3}\ln(|x-2|) + \frac{5}{3}\ln(|x+1|) + c = \\
= \ & \ln(|x| \cdot |x-2| \cdot |x+1|) - \frac{5}{3}\ln(|x-2|) + \frac{5}{3}\ln(|x+1|) + c \\
= \ & \ln(|x|) + \ln(|x-2|) + \ln(|x+1|) - \frac{5}{3}\ln(|x-2|) + \frac{5}{3}\ln(|x+1|) + c \\
= \ & \ln(|x|) - \frac{2}{3}\ln(|x-2|) + \frac{8}{3}\ln(|x+1|) + c \ .
\end{aligned}$$

5. Hom. Lös.: Durch Separation erhalten wir

$$\begin{aligned}
y'(x)(x+1) + y(x) &= 0 \\
\frac{y'(x)}{y(x)} &= \frac{-1}{x+1} \\
\int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{dx}{x+1} \\
\Rightarrow \quad \ln|y| &= -\ln|x+1| + c \\
\Rightarrow \quad y_{hom}(x) &= \frac{K}{x+1} \ , \qquad \text{mit } K = \pm e^c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ .
\end{aligned}$$

Part. Lös.:
Variante 1: Ansatz: $y_p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Einsetzen liefert $(3ax^2 + 2bx + c)(x+1) + ax^3 + bx^2 + cx + d = x^3$. Durch Koeffizientenvergleich folgt es

$$\begin{cases} 3a + a = 1 \ , \\ 3a + 2b + b = 0 \ , \\ 2b + c + c = 0 \ , \\ c + d = 0 \ . \end{cases}$$

Daraus folgt $a = c = \frac{1}{4}, b = d = \frac{-1}{4}$ $\qquad \Rightarrow \qquad$ $y_p(x) = \frac{1}{4}\left[x^3 - x^2 + x - 1\right]$.

Die Allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_p(x) = \frac{K}{x+1} + \frac{1}{4}\left[x^3 - x^2 + x - 1\right] \ .$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = \sqrt{5}$ sagt, dass $K = \sqrt{5} + \frac{1}{4}$ sein muss.
Somit ist die einzige Lösung des Anfangswertproblem

$$y(x) = \frac{\sqrt{5} + 1/4}{x+1} + \frac{1}{4}\left[x^3 - x^2 + x - 1\right] \ .$$

Variante 2: Mit Variation der Konstante Methode folgt $y_p(x) = \frac{K(x)}{x+1}$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} \left[\frac{K'(x)}{x+1} - \frac{K(x)}{(x+1)^2}\right](x+1) + \frac{K(x)}{x+1} &= x^3 \\ K'(x) &= x^3 \\ K(x) &= \frac{x^4}{4} \ . \end{aligned}$$

Daraus folgt $y_p(x) = \frac{x^4}{4(x+1)}$.
Die Allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_p(x) = \frac{K}{x+1} + \frac{x^4}{4(x+1)} \ .$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = \sqrt{5}$ sagt, dass $K = \sqrt{5}$ sein muss.
Somit ist die einzige Lösung des Anfangswertproblem

$$y(x) = \frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{x^4}{4(x+1)} \ .$$

[*6 Punkt*]

Bemerkung: Variante 1 und 2 ergeben das gleiche Resultat, weil es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{x^4}{4(x+1)} &= \frac{\sqrt{5}}{x+1} + \frac{x^4 - 1 + 1}{4(x+1)} \\ &= \frac{\sqrt{5} + 1/4}{x+1} + \frac{x^4 - 1}{4(x+1)} \\ &= \frac{\sqrt{5} + 1/4}{x+1} + \frac{(x+1)(x^3 - x^2 + x - 1)}{4(x+1)} \\ &= \frac{\sqrt{5} + 1/4}{x+1} + \frac{1}{4}\left[x^3 - x^2 + x - 1\right] \ . \end{aligned}$$

6. Sei S die Fläche des Graph von $f(x,y) = 10 - x^2 - y^2$ und sei $T(x,y,z) = x^2y + y^2z + 4x + 14y + z$ die Temperatur.

   i) Die Gleichung der Tangentialebene Σ zur Oberfläche S im Punkt $(0,0,10)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} -f_x(0,0,10)x - f_y(0,0,10)y + z &= 10 \\ 2x|_{x=y=0,z=10} \cdot x + 2y|_{x=y=0,z=10} \cdot y + z &= 10 \\ z &= 10 \end{aligned}$$

   Bemerkung: der Graph von $f(x,y)$ ist ein nach unten geöffneten Paraboloid, der symmetrisch bzgl. der $z-$Achse liegt. Sein Maximum ist der Punkt $(0,0,10)$, deshalb ist die Tangentialebene an dieser Stelle horizontal.

   ii) Der Gradient von der Temperatur im Punkt $(0,0,10)$

$$\nabla T(x,y,z)|_{x=y=0,z=10} = \begin{pmatrix} 2xy+4 \\ x^2+2yz+14 \\ y^2+1 \end{pmatrix} |_{x=y=0,z=10} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

   Die maximale Richtungsableitung von $T(x,y,z)$ auf Σ löst die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}\right] &= \frac{d}{dt}[4\cos t + 14\sin t] = 0 \\ -4\sin t + 14\cos t &= 0 \\ t_1 = \arctan(\frac{7}{2}) \qquad &\text{oder} \qquad t_2 = \arctan(\frac{7}{2}) + \pi \ . \end{aligned}$$

   Da die zweite Ableitung $-4\cos t - 14\sin t$ ist und $\cos(t_1), \sin(t_1) > 0$, $\cos(t_2), \sin(t_2) < 0$, folgt es, dass t_1 ein Maximum (die zweite Ableitung ist negativ) bzw. t_2 ein Minimum (die zweite Ableitung ist positiv) ist.
   Die Richtung in Σ, in welcher die Änderung von $T(x,y,z)$ maximal ist, ist somit $(7,2,0)$.

[6 Punkt]

7. Zuerst suchen wir die kritischen Punkten im Inneren von Q.

$$\nabla f(x,y) = \vec{0}$$
$$\begin{cases} 4(x^2+y^2-1)x &= 0 \\ 4(x^2+y^2-1)y &= 0 \end{cases}$$

<u>Fall 1:</u> $x = 0, y = 0 \rightsquigarrow P_1 = (0,0)$.
<u>Fall 2:</u> $x = 0 \Rightarrow y = \pm 1 \rightsquigarrow P_2 = (0,1)$.
<u>Fall 3:</u> $y = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \rightsquigarrow$ Eckpunkten $P_3 = (-1,0)$ und $P_4 = (1,0)$.
<u>Fall 4:</u> $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Obere Halbkreis K mit Zentrum $(0,0)$ und Radius 1.

<u>Variante 1:</u> Parametrisierung von ∂Q.

- $y = 2-2x^2 \Rightarrow f(x, 2-2x^2) = (x^2+4-8x^2+4x^4-1)^2 = (4x^4-7x^2+3)^2$. Daraus folgt:

$$\partial_x f(x, 2-2x^2) = 0 \Rightarrow 2(4x^4-7x^2+3)(16x^3-14x) = 0\ .$$

Somit gilt entweder $4x^4 - 7x^2 + 3 = 0$, die zu $x = \pm 1$ (Eckpunkten) oder $x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$ ($\rightsquigarrow P_{5,6} = (\pm\sqrt{\frac{3}{4}}, \frac{1}{2} \in K)$) führt oder $16x^3 - 14x = 0$, die zu $x = 0$ ($\rightsquigarrow P_7 = (0,2)$) oder $x = \pm\sqrt{\frac{7}{8}}$ ($\rightsquigarrow P_{8,9} = (\pm\sqrt{\frac{7}{8}}, \frac{1}{4})$) führt .

- $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow f(x, \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}) = (x^2 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} - 1)^2 = (\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4})^2 = \frac{1}{16}(x^4 + 2x^2 - 3)^2$. Daraus folgt:

$$\partial_x f(x, \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow 8(x^4 + 2x^2 - 3)(4x^3 + 4x) = 0\ .$$

Somit gilt entweder $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$, die zu $x = \pm 1$ (Eckpunkten) oder $x^2 = -3$ ($\rightsquigarrow$ keine reelle Lösung) führt oder $4x^3 + 4x = 0$, die zu $x = 0$ ($\rightsquigarrow P_{10} = (0, -\frac{1}{2})$) oder $x^2 = -1$ ($\rightsquigarrow$ keine reelle Lösung) führt .

<u>Variante 2:</u> Lagrangian Multiplikatoren:

- Auf $g_1(x,y) := 2 - 2x^2 - y = 0$ stellen wir das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) &= \lambda \nabla g_1(x,y) \\ g_1(x,y) &= 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} 4x(x^2+y^2-1) &= \lambda(-4x) \\ 4y(x^2+y^2-1) &= \lambda(-1) \\ 2 - 2x^2 - y &= 0 \end{cases}$$

Fall 1: $x = 0$. Dann gilt $y = 2$ ($\rightsquigarrow P_7 = (0, 2)$).
Fall 2: $x \neq 0$. Dann entweder $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ($\rightsquigarrow$ Eckpunkten $P_{3,4} = (\pm 1, 0)$ und $P_{5,6} = (\pm\sqrt{\frac{3}{4}}, \frac{1}{2} \in K)$) oder $x^2 + y^2 - 1 \neq 0$, dann $y = 1/4$ ($\rightsquigarrow P_{8,9} = (\pm\sqrt{\frac{7}{8}}, \frac{1}{4})$).

- Auf $g_2(x, y) := \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} - y = 0$ stellen wir das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nabla f(x, y) & = & \lambda \nabla g_2(x, y) \\ g_2(x, y) & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} 4x(x^2 + y^2 - 1) & = & \lambda(x) \\ 4y(x^2 + y^2 - 1) & = & \lambda(-1) \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} - y & = & 0 \end{array} \right.$$

Fall 1: $x = 0$. Dann gilt $y = -\frac{1}{2}$ ($\rightsquigarrow P_{10} = (0, -\frac{1}{2})$).
Fall 2: $x \neq 0$. Dann entweder $y = -1$ (ausserhalb vom Gebiet G) oder $x^2 + y^2 - 1 = 0 \rightsquigarrow P_{3,4} = (\pm 1, 0)$ Eckpunkten).
Eckpunkte Eckpunkten $P_3 = (-1, 0)$ und $P_4 = (1, 0)$ überprüfen.
Funktionswerte:

$$\begin{array}{rcl} f(P_1) & = & 1 \\ f(P_2) & = & f(P_{3,4}) = f(P_{5,6}) = f(\text{Kreis K}) = 0 \ , \\ f(P_7) & = & 9, \\ f(P_{8,9}) & = & \dfrac{1}{256} \\ fP_{10} & = & \dfrac{9}{16} \end{array}$$

Minima $\rightsquigarrow$ K. Maximum P_7

[*7 Punkt*]

8. Variante 1: Parametrisierung von S

$$r(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ 2\cos\theta \end{pmatrix} , \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{und} \quad \varphi \in [0, 2\pi] \ .$$

Daraus folgt

$$r_\varphi \times r_\theta = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi \\ -2\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin^2\theta\sin\varphi \\ 2\sin^2\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} .$$

$r_\varphi \times r_\theta$ zeigt tatsächlich nach aussen!
Bemerkung: es ist nicht notwendig $|r_\varphi \times r_\theta| = 4\sin^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta$ zu rechnen.

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} &= \iint_S \vec{F}(r(\theta,\varphi))\cdot \frac{r_\varphi \times r_\theta}{|r_\varphi \times r_\theta|}|r_\varphi \times r_\theta|\, d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 2\sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\cos\varphi \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sin^2\theta\sin\varphi \\ 2\sin^2\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin^3\theta\sin^2\varphi - 2\sin^3\theta\cos^2\varphi - \sin\theta\cos\theta)\, d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}(4\sin^2\varphi - 2\cos^2\varphi)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta(1-\cos^2\theta)\, d\theta\, d\varphi - \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}(6\sin^2\varphi - 2)\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + 2\pi\left[\frac{\cos^2\theta}{2}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}(6\sin^2\varphi - 2)\, d\varphi - 2\pi\frac{1}{2} \\
&= 4\left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2}\right]\Big|_0^{2\pi} - \frac{8\pi}{3} - \pi \\
&= 4\pi - \frac{8\pi}{3} - \pi \\
&= \frac{\pi}{3}\,.
\end{aligned}$$

Variante 2: Sei $B = \left\{(x,y,z) | x^2+y^2 \leq 1\ , z = 0\right\}$ (den Normalenvektor zeigt nach unten).

Nach dem Satz von Gauss, da $div\vec{F} = 2 - 1 + 0 = 1$, gilt

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_B \vec{F}\cdot d\vec{B} &= \iiint_V div\vec{F}\, dV \\
&= \text{Volumen Halbellipsoid} \\
&= \frac{4}{3}\cdot\frac{2\pi}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 2
\end{aligned}$$

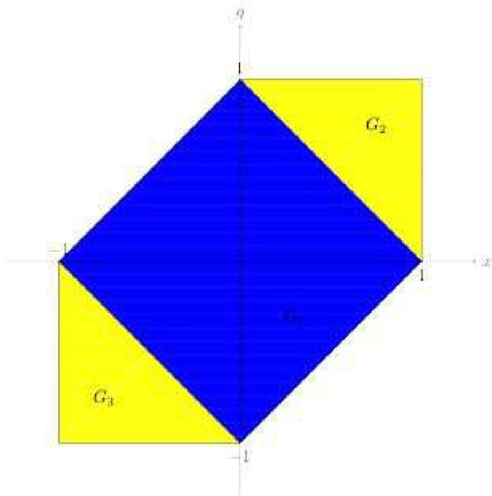
Somit folgt

$$
\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \frac{4}{3}\pi - \iint_B \vec{F} \cdot d\vec{B} \\
&= \frac{4\pi}{3} - \iint_B \begin{pmatrix} 2x \\ -y \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx\, dy \\
&= \frac{4\pi}{3} - \text{Fäche}(B) \\
&= \frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3} \; .
\end{aligned}
$$

[6 Punkt]

9. Die Gesamtladung des Gebiets G ist gegeben durch

$$\iint_G \sigma(x, y)\, dx\, dy \; .$$



Da für die Ladungsdichte gelten

$$\begin{aligned}
\sigma(-x,y) &= -\sigma(x,y)\ , \\
\sigma(x,-y) &= -\sigma(x,y)\ , \\
\sigma(-x,-y) &= \sigma(x,y)\ ,
\end{aligned}$$

folgt es

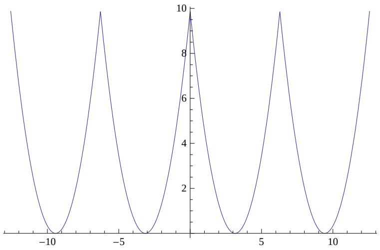
$$\begin{aligned}
\iint_G \sigma(x,y)\,dx\,dy &= \underbrace{\iint_{G_1} \sigma(x,y)\,dx\,dy}_{=0} + \iint_{G_2} \sigma(x,y)\,dx\,dy + \iint_{G_3} \sigma(x,y)\,dx\,dy \\
&= 2\iint_{G_2} \sigma(x,y)\,dx\,dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\int_0^1 \int_{-x+1}^1 xy(x^2+y^2)\,dy\,dx \\
&= 2\int_0^1 \left[x^3\frac{y^2}{2} + x\frac{y^4}{4}\right]\Big|_{-x+1}^1 \\
&= 2\int_0^1 \left[\frac{x^3}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3(1-x)^2}{2} - \frac{x(1-x)^4}{4}\right] dx \\
&= 2\int_0^1 \left[\frac{x^3}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{2} + x^4 - \frac{x^5}{2} - \frac{x^5}{4} + x^4 - \frac{3x^3}{2} + x^2 - \frac{x}{4}\right] dx \\
&= 2\int_0^1 \left[-\frac{3}{4}x^5 + 2x^4 - \frac{3}{2}x^3 + x^2\right] dx \\
&= 2\left[-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{5} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right] \\
&= 2\cdot\frac{7}{30} = \frac{7}{15}\ .
\end{aligned}$$

[6 Punkt]

10. Betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} (x-\pi)^2 & \text{für } x \in [0,2\pi) \\ f(x+2\pi) & \text{für alle } x \end{cases} \quad .$$

(a) 

Da $f(x)$ gerade ist (d.h. $f(x) = f(-x)\ \forall x$), hat die Fourierreihe von f auf das Intervall $[-2\pi, 2\pi]$ die Gestalt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \ ,$$

wobei

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \ , \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \ . \end{aligned}$$

Rechnen wir die Koeffizienten a_k explizit aus:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)^2\,dx \\ &= \frac{1}{6\pi}(x-\pi)^3|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi^3 - (-\pi)^3}{6\pi} = \frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{(x-\pi)^2}_{\downarrow}\underbrace{\cos(kx)}_{\uparrow}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{\frac{\sin(kx)}{k}(x-\pi)^2\Big|_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{2}{k}\int_0^{2\pi}\underbrace{(x-\pi)}_{\downarrow}\underbrace{\sin(kx)}_{\uparrow}\,dx\right] \\
&= -\frac{2}{k\pi}\left[\frac{-\cos(kx)}{k}(x-\pi)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{k}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(kx)\,dx}_{=0}\right] \\
&= -\frac{2}{k\pi}\,\frac{-\pi-\pi}{k} = \frac{4}{k^2}\ .
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}\cos(kx)\ . \tag{1}$$

(b) Setzen wir $x = 0$ in der Gleichung (1) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(0) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2} \\
\Leftrightarrow \quad \pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2} \\
\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2} &= \frac{2\pi^2}{3} \\
\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} &= \frac{\pi^2}{6}\ .
\end{aligned}$$

[*7 Punkt*]