Das Gesetz von Darcy zum Volumenstrom

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

Definitionen sollen den Schülerinnen und Schülern nicht einfach an den Kopf geworfen werden. Definitionen wollen motiviert sein, damit die Schülerinnen und Schüler den Sinn dahinter sehen. Definitionen gehören also nicht an den Anfang eines Abschnitts, sondern ans Ende einer Einleitung. Beim elektrischen Widerstand offeriere ich eine Analogie zwischen dem elektrischen Strom durch ein Widerstandselement und der Wasserströmung beim Kaffeebrauen: Das Wasser erfährt im gemahlenen Kaffee einen Strömungswiderstand. Die Analogie leuchtet den Schülerinnen und Schülern unmittelbar ein. Aber wenn ich schon vom Widerstand einer Wasserströmung spreche, sollte ich auch ein Experiment dazu durchgeführt haben. Nach meiner Erfahrung erzählt man sonst leicht Unsinn. Ausserdem kann ein neues Schülerexperiment nie schaden und mehr Hintergrundwissen ebenso wenig.

Theorie

Henry Philibert Gaspard Darcy (1803-1858) war französischer Wasserbau-Ingenieur. Er untersuchte laminare Strömungen durch Sandfilter und fand 1855/56 in Experimenten, dass der Volumenstrom $\Delta V/\Delta t$ proportional zum Druckunterschied Δp vor und nach dem Filter ist. Das Gesetz ist somit eine Analogie zum ohmschen Gesetz, d.h. der Strömungswiderstand ist unabhängig vom Volumenstrom. In der Anordnung von Abb. 1 bedeutet dies, dass die Geschwindigkeit dy/dt, mit der sich der Wasserspiegel senkt, proportional zur Höhe $y - y_F$ des Wasserspiegels über dem Filter ist. Mit der Proportionalitätskonstanten τ und der Integrationskonstanten y_0 erhalten wir folgende Differentialgleichung und Lösung:

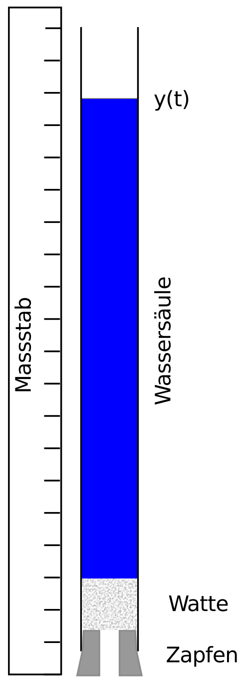

Abbildung 1: *Glasrohr mit Wasser, Wattefilter, Zapfen und Massstab.*

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y - y_F}{\tau} \tag{1}$$

$$\int \frac{dy}{y - y_F} = -\int \frac{dt}{\tau} \tag{2}$$

$$\ln \frac{y - y_F}{y_0 - y_F} = -\frac{t}{\tau} \tag{3}$$

$$y = (y_0 - y_F)\exp(-t/\tau) + y_F \tag{4}$$

Die Beziehung $dy \propto y$ ist von der Zinsrechnung her bekannt. Dort wissen wir ja, dass es eine Exponentialfunktion gibt, auch oh-

ne dass wir eine Differentialgleichung lösen müssen.
Als Kontrast wollen wir den reibungsfreien Fall untersuchen. Beim Torricellischen Ausflussgesetz ist die Geschwindigkeit, mit der das Wasser unten ausströmt, proportional zur Wurzel aus der Höhe: $v = \sqrt{2g(y - y_F)}$. Die Ausflussgeschwindigkeit ist proportional zum Volumenstrom und dieser somit proportional zur Wurzel aus der Höhe. Mit der Proportionalitätskonstanten a und der Integrationskonstanten t_F erhalten wir folgende Differentialgleichung und Lösung:

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{2a \cdot (y - y_F)} \tag{5}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y - y_F}} = -\sqrt{2a} \int dt \tag{6}$$

$$2\sqrt{y - y_F} = -\sqrt{2a}\ (t - t_F) \tag{7}$$

$$y = \frac{1}{2} a \cdot (t - t_F)^2 + y_F \tag{8}$$

Die Differentialgleichung entspricht jener für eine gleichmässig beschleunigte Bewegung, die Lösung lässt sich also ebenfalls durch Analogieschluss ohne höhere Mathematik herleiten.
Falls das Gesetz von Darcy zutrifft, sollte sich der Flüssigkeitsspiegel mit der Zeit exponentiell senken, falls das Gesetz von Torricelli gilt, sollte $y(t)$ eine quadratische Funktion sein.

Experiment

Ich beschaffte mir ein Plexiglasrohr von etwas über 90 cm Länge und ca. 2 cm Durchmesser. Das untere Ende verschloss ich ca. 3 cm hoch mit Watte und fixierte diese mit einem durchbohrten Gummizapfen, siehe Abb. 1. Ich stellte das Rohr vertikal auf ein Gitter und befestigte ein Blechlineal mit Millimeterskala auf der Aussenseite. Ich goss Wasser von oben ins Rohr und stoppte die Zeit t, wann der Wasserspiegel eine bestimmte Koordinate y erreicht hat. Die Zeit konnte ich auf etwa 1 s, die Position des Wasserspiegels auf etwa 1 mm genau messen. Da nicht klar ist, von wo aus die Höhe der Wassersäule gemessen werden soll, habe ich die vertikale Koordinate des Wasserspiegels gemessen und das Nullniveau (Koordinate des Watte-Filters y_F) als Regressionsparameter behandelt.
Eine Exponentialfunktion passt hervorragend zu den Messwerten, siehe Abb. 2. Dieses Ergebnis spricht für das Gesetz von Darcy. Unbedingt nötig ist aber noch die Gegenprobe: Passt eine Parabel zu den Daten? Wie Abb. 3 zeigt, ist die Strömung offensichtlich nicht reibungsfrei. Betrachtet man die Residuen der Kurvenanpassungen, siehe Abb. 4, so ist der Unterschied noch gewaltiger.
Die graphischen Darstellungen und Regressionen sind der besseren Qualität wegen mit proFit gemacht worden. Für Schülerübungen kann dasselbe auch mit Excel berechnet werden; allerdings muss für nichtlineare Fits das Add-In namens Solver geladen werden.

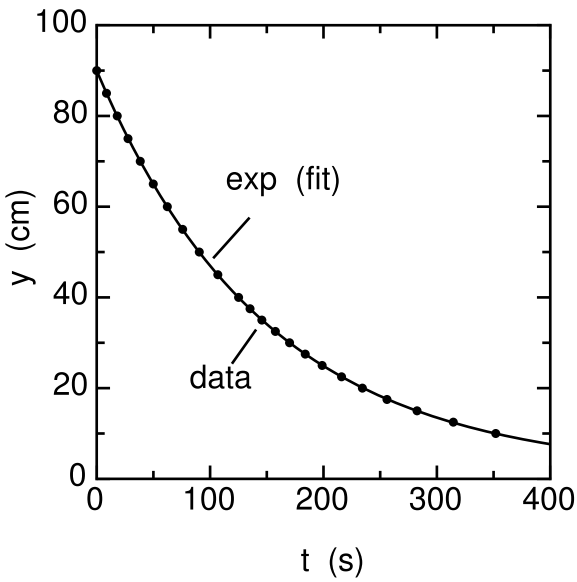

Abbildung 2: *Pegelstand y als Funktion der Zeit t. Messdaten (gefüllte Kreise) mit Fitfunktion $y = y_1 \exp(-t/\tau) + y_F$, wobei $y_1 =$ 88.53 cm, $\tau = 150.4$ s und $y_F = 1.45$ cm. Die Residuen sind kleiner als die Fehlerschranken!*

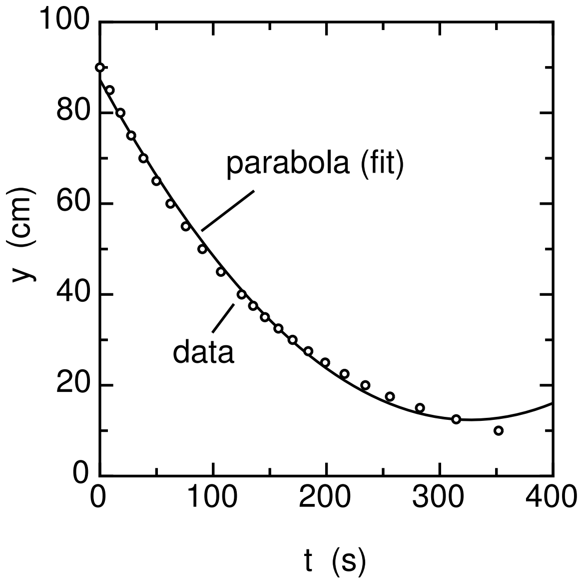

Abbildung 3: *Pegelstand y als Funktion der Zeit t. Messdaten (offene Kreise) mit Fitfunktion $y = \frac{1}{2}a(t - t_F)^2 + y_F$, wobei $a = 1.398 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{cm/s^2}$, $t_F = 327\,\mathrm{s}$ und $y_F = 12.4\,\mathrm{cm}$. Die Residuen sind viel grösser als die Fehlerschranken und der Wert von y_F macht keinen Sinn.*

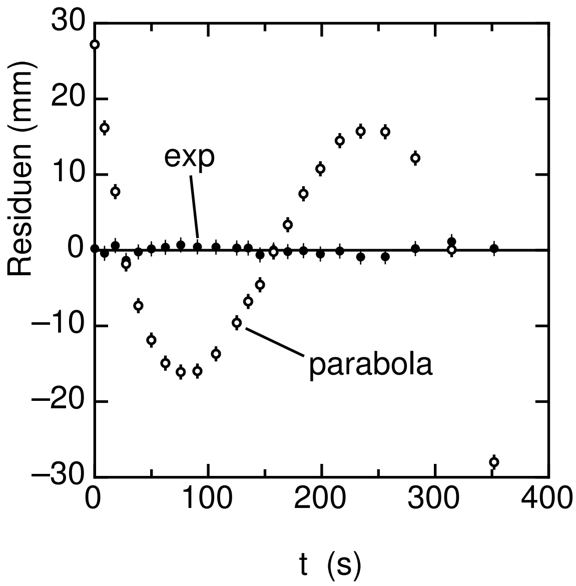

Abbildung 4: *Die Residuen bei Anpassung einer Exponentialfunktion (exp, gefüllte Kreise) sind viel kleiner als die Residuen beim Fit einer Parabel (parabola, offene Kreise).*

Schluss

Der Wasserstrom durch ein Wattefilter gehorcht dem Gesetz von Darcy: Der Volumenstrom ist proportional zum Druckunterschied respektive zur Wasserhöhe. Die Analogie zum ohmschen Gesetz ist gut.