D-BAUG | Analysis I | HS 2013
Dr. Meike Akveld

Serie 2

1. Induktion:

a) Zeigen Sie die **Ungleichung von Bernoulli**: Für alle $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

b) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$3 | n^3 - n,$$

wobei $a|b$ bedeutet, dass b durch a teilbar ist, also dass $b/a \in \mathbb{Z}$.

2. Lösen Sie folgende Gleichungen in $z \in \mathbb{C}$ und stellen Sie die Lösung(en) sowohl in Normal- als auch in Polarform dar.

a) $z^2 = \mathbf{i}$

b) $\frac{z+3-2\mathbf{i}}{z-5-\mathbf{i}} = 3\mathbf{i}$

c) $z^2 + (13+\mathbf{i})z + 44 + 8\mathbf{i} = 0$

d) $z = \bar{z}$.

3. Skizzieren Sie die folgenden Bereiche der komplexen Ebene!

a) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 3, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \frac{|z+2-2\mathbf{i}|}{|z+\mathbf{i}|} = 2\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \mathrm{Im}(z) \geq \mathrm{Re}(z)\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-3| \geq 1 \wedge |z-1-\mathbf{i}| < 4\}$

e) $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-\mathbf{i}+3| \geq |z+2\mathbf{i}| \wedge \mathrm{Re}(z) > 0 \wedge \mathrm{Im}(z) > 0\}$

f) Prüfungsaufgabe 1b) Winter 2013:
$\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \left|\frac{z}{1-i}\right| = \sqrt{8} \wedge 0 \leq \arg \frac{z}{i} \leq \frac{3}{4}\pi\}$

Bitte wenden!

4. Online-Abgabe

1. Sei z in der oberen Halbebene. Welche der folgenden Zahlen sind dann ebenfalls in der oberen Halbebene?

(a) $1/z$

(b) $-1/z$

(c) $\bar{z}$

(d) $-1/\bar{z}$

2. Was ist die geometrische Bedeutung der Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto -\mathbf{i}z$?

(a) Drehung um $\pi/2$ im Uhrzeigersinn.

(b) Drehung um $\pi/2$ gegen den Uhrzeigersinn.

(c) Spiegelung an der x-Achse.

(d) Spiegelung an der y-Achse.

3. Für die komplexe Zahl $z = (3 + 2\mathbf{i})^3$ gilt

(a) $z = 27 + 8\mathbf{i}$.

(b) $z = -9 + 46\mathbf{i}$.

(c) $z = -9 + 10\mathbf{i}$.

(d) $z = -9 - 46\mathbf{i}$.

Siehe nächstes Blatt!

4. Für die komplexe Zahl $z = \frac{3+2\mathbf{i}}{4-\mathbf{i}}$ gilt

(a) $z = \frac{10+11\mathbf{i}}{17}$.

(b) $z = \frac{17}{8\mathbf{i}+2}$.

(c) $z = \frac{14+5\mathbf{i}}{17}$.

(d) $z = \frac{5+14\mathbf{i}}{17}$.

5. $\arg\left(\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^8\right) =$

(a) $\frac{2\pi}{3}$

(b) $\frac{\pi}{3}$

(c) $\frac{1}{3}$

(d) $\frac{2}{3}$

6. Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 4(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\frac{5\pi}{6})$ und $z_2 = 1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$. Welche Aussagen über $z = \frac{z_1}{z_2}$ sind korrekt?

(a) $|z| = 2$

(b) $|z| = 4$

(c) $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$

(d) $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$

(e) Keine davon

7. Sei z der Punkt auf dem Einheitskreis mit Argument φ. Wenn z entlang des Einheitskreises im Uhrzeigersinn wandert und den Wert -1 vermeidet, dann ist $\tan(\varphi/2)$

(a) monoton wachsend

(b) monoton fallend

(c) hängt von z ab

8. Die Mengen $M_1, M_2 \subset \mathbb{C}$ seien definiert durch

$$M_1 = \{z_1 \in \mathbb{C} \,|\, (\mathrm{Re}(z_1) \geq 0) \wedge (\mathrm{Im}(z_1) \in [0, e))\}$$

und

$$M_2 = \{z_2 \in \mathbb{C} \,|\, (\mathrm{Re}(z_2) \in (0, 2]) \wedge (\mathrm{Im}(z_2) \in [0, 2])\}\,.$$

Für eine komplexe Zahl z gilt: $z \in M_1 \cap M_2$ genau dann, wenn

(a) $(z \in \mathbb{R}) \wedge (z \leq 2)$.

(b) $|z - \mathbf{i}| \leq 2$.

(c) $(|z| \leq 2) \ \wedge \ (\mathrm{Re}(z) \in (0, 2]) \ \wedge \ (z \neq 0)$.

(d) $(\mathrm{Im}(z) \in [0, 2]) \ \wedge \ (\mathrm{Re}(z) \in (0, 2])$.

9. Welche der folgenden Inklusionen ist wahr?

(a) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Im}(z) > 0\} \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) > 0\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) > 0\} \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(-z) - \mathrm{Im}(-z) > 0\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z \cdot \mathbf{i}) > \mathrm{Re}(z)\} \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) < -\mathrm{Im}(z)\}$

(d) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z \cdot \mathbf{i}) > \mathrm{Im}(z)\} \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > \mathrm{Re}(z)\}$

10. Für jede komplexe Zahl $z = x + \mathbf{i}y$ gilt $z \cdot \bar{z} =$

(a) $|z|$.

(b) $x^2 + y^2$.

(c) $x^2 - y^2$.

(d) $x^2 + \mathbf{i}y^2$.

(e) der Distanz von z zum Ursprung.

11. Für jede komplexe Zahl $z = x + \mathbf{i}y$ gilt Re(z) $=$

(a) $\frac{z \cdot \bar{z}}{2}$.

(b) $z + \bar{z}$.

(c) $\frac{z - \bar{z}}{2}$.

(d) $\frac{z + \bar{z}}{2}$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Donnerstag den 3. Oktober 2013 in der Übungsstunde oder bis spätestens 13:00 im Fach Ihres Assistenten im HG J 68.