

Serie 3

1. Wir betrachten die komplexe Gleichung

$$z^6 = -4\sqrt{3} - 4i.$$

- a) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ dieser Gleichung.
- b) Zeichnen Sie die Lösungen in die komplexe Zahlenebene ein.
- c) Welche der eingezeichneten Lösungen ist die Zahl $\sqrt[6]{-4\sqrt{3} - 4i}$?
- d) **Prüfungsaufgabe 1a) Sommer 2013:**
Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^4 = -9 + 9\sqrt{3}i$$

und zeichnen Sie diese in die komplexe Zahlenebene ein.

Hinweis: Gemäss Definition aus der Vorlesung verstehen wir unter $\sqrt[n]{z_0}$ diejenige Lösung z der komplexen Gleichung $z^n = z_0$, für die $-\frac{\pi}{n} < \arg(z) \leq \frac{\pi}{n}$ gilt. Sie dürfen alle Lösungen in der Polarform angeben.

2. Im Folgenden sei z_1 eine Lösung der entsprechenden Gleichung. Bestimmen Sie jeweils die reellen Koeffizienten p und q sowie die weiteren Lösungen!

a)

$$3z^3 - 12z^2 + pz + q = 0, \quad z_1 = 3 + i$$

b)

$$z^3 + pz^2 + (\pi + 1)^2z + q = 0, \quad z_1 = -i + \pi$$

3. a) Rechnen Sie nach, dass die folgende Beziehung gilt:

$$\sin(5\varphi) = 5 \cos^4(\varphi) \sin(\varphi) - 10 \cos^2(\varphi) \sin^3(\varphi) + \sin^5(\varphi).$$

b) **Prüfungsaufgabe 1b) Sommer 2013:**

Bestimmen und skizzieren Sie den Bereich M in der komplexen Ebene \mathbb{C} :

$$M := \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1 - 2i| \leq |z - 4 + i| \wedge \operatorname{Re}(z) < 0 \wedge \operatorname{Im}(z) < 0\}.$$

4. Online-Abgabe

1. Der Realteil der komplexen Zahl $\exp(-i)$ beträgt

- (a) 1.
- (b) 0.
- (c) $\cos(1)$.
- (d) $\sin(1)$.
- (e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

2. Sei $z = 2 \exp\left(\frac{\pi}{6}i\right) \cdot (5\sqrt{3} + b \cdot i)$. Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist z eine reelle Zahl?

- (a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- (b) $\sqrt{3}$
- (c) $\frac{1}{5\sqrt{3}}$
- (d) $5\sqrt{3}$
- (e) Keines von diesen.

3. Welches sind Lösungen der Gleichung $z^3 = 2(i - 1)$?

- (a) $1 + i$
- (b) $1 - i$
- (c) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$
- (d) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{-5\pi}{12} + i \sin \frac{-5\pi}{12} \right)$
- (e) Keine davon.

4. Welche der folgenden komplexen Zahlen sind gleich?

- (a) $\exp(-3\pi i/2)$
- (b) $\exp(\pi i/6)$
- (c) $-i$
- (d) i
- (e) $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$

5. Sei $z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Dann ist z^6 gleich

- (a) $64(i\sqrt{2} - \sqrt{2})$.
- (b) $-32(i\sqrt{2} - \sqrt{2})$.
- (c) $64\exp(i\frac{3}{4}\pi)$.
- (d) $64\exp(i\frac{3}{2}\pi)$.

6. Sei $z = r \exp(i\phi)$, so gilt $z^n =$

- (a) $r^n \exp(i\phi^n)$.
- (b) $n \cdot r \exp(in\phi)$.
- (c) $r^n \exp(in\phi)$.
- (d) $n \cdot r \exp(i\phi^n)$.

7. Wahr oder falsch: $z^n = c$ hat für $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ genau n verschiedene Lösungen.

- (a) Wahr
- (b) Falsch

8. Wahr oder falsch: $\forall c \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N} \exists! \xi \in \mathbb{C} : \xi^n = c$.

- (a) Wahr
- (b) Falsch

Bitte wenden!

9. Wahr oder falsch: $\forall c \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N} : -\frac{\pi}{n} < \arg(\sqrt[n]{c}) \leq \frac{\pi}{n}$.

- (a) Wahr
- (b) Falsch

10. Wahr oder falsch: Der Hauptsatz der Algebra besagt, dass jedes Polynom n -ten Grades genau n verschiedene Nullstellen hat.

- (a) Wahr
- (b) Falsch

11. Wahr oder falsch: Jedes Polynom n -ten Grades mit reellen Koeffizienten hat n verschiedene Nullstellen.

- (a) Wahr
- (b) Falsch

Abgabe der schriftlichen Aufgabe: Donnerstag den 10. Oktober 2013 in der Übungsstunde oder bis spätestens 13:00 im Fach Ihres Assistenten im HG J 68.