Serie 4

1. Untersuchen Sie die nachstehenden Zahlenfolgen. Sind sie beschränkt? Sind sie monoton? Konvergieren sie, und falls ja, wie lautet ihr Grenzwert?

a) $a_n = \cos \frac{\pi n}{3}$

b) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n}{n^2}$

c) $a_n = \frac{3n^4 - 5n^2 + 2}{7n^4 - 4n^3}$

d) $a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ für $n \geq 3$

e) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

f) $a_n = \sqrt{(n+1)n} - n$

2. **a)** Sei $a_n = a_1 + (n-1)d$ mit $a_1 \in \mathbb{R}$ eine arithmetische Folge reeller Zahlen. Finden Sie eine explizite Formel für die n-te Partialsumme $\sum_{i=1}^{n} a_i$ einer arithmetischen Reihe.

b) Sei $a_n = a_1 q^{n-1}$ mit $a_1 \in \mathbb{R}$ eine geometrische Folge reeller Zahlen mit $|q| < 1$. Zeigen Sie: $\{a_n\}$ konvergiert gegen 0.

3. Die Eulersche Zahl:
Wir definieren zwei Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ durch

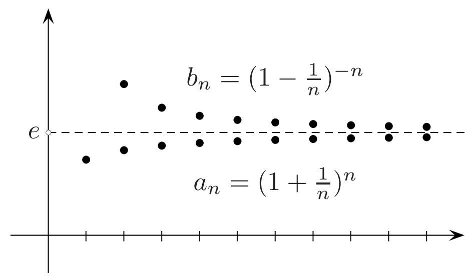
$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

und

$$b_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass diese beiden Folgen gegen denselben Grenzwert konvergieren. Dieser wird in der Vorlesung e, die *Eulersche Zahl*, genannt werden.

Bitte wenden!



a) Zeigen Sie
$$b_{n+1} = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

b) Zeigen Sie mit der Ungleichung von Bernoulli (siehe Serie 2 Aufgabe 1), dass
$$\frac{a_n}{b_n} > 1 - \frac{1}{n}$$
und folgern Sie, dass die Folge $\{a_n\}$ monoton wächst.

c) Zeigen Sie auf ähnliche Weise, dass $\{b_n\}$ monoton fällt.

d) Folgern Sie, dass
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

4. Die Folge der DIN A - Papierformate ist wie folgt definiert:

DIN A0 ist ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{2} : 1$ und der Fläche 1 m^2.

DIN Ak, $k \geq 1$, entsteht aus DIN A$(k-1)$, indem die längere Seite des Rechtecks halbiert wird. Berechnen Sie die Länge l_k und die Breite b_k des DIN Ak - Formates.

Berechnen Sie l_k/b_k.

Siehe nächstes Blatt!

5. Online-Abgabe

1. Welche der Aussagen sind richtig?

(a) Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.

(b) Jede beschränkte Folge ist konvergent.

(c) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

(d) Eine nicht beschränkte Folge divergiert.

(e) Die Summe zweier divergenter Folgen ist divergent.

(f) Jede konvergente Folge ist monoton.

(g) Sei a_n eine konvergente Folge. Dann ist auch $b_n = (a_n)^2$ konvergent.

2. Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

(a) Die Folge ist monoton wachsend.

(b) Die Folge ist beschränkt.

(c) Die Folge ist eine Nullfolge.

(d) Die Folge ist konvergent.

(e) Der Limes der Folge ist 1.

Bitte wenden!

3. Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{n^2}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

(a) Die Folge ist monoton wachsend.

(b) Die Folge ist beschränkt.

(c) Die Folge ist divergent.

(d) Die Folge besitzt keinen Limes in $\mathbb{R}$.

4. Welche der folgenden Aussagen ist dazu äquivalent, dass die Folge $\{a_n\}$ **nicht** in $\mathbb{R}$ konvergiert?

(a) $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n - a| > 1/n$

(b) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \epsilon > 0\ \forall N(\epsilon) \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N(\epsilon) : |a_n - a| > \epsilon$

(c) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \epsilon > 0\ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N(\epsilon) : |a_n - a| > \epsilon$

5. Der Grenzwert der unendlichen Folge
$2,\ 2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2\sqrt{2}},\ 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$ ist

(a) 0.

(b) $\sqrt{2}$.

(c) 2.

(d) 4.

(e) ∞.

Siehe nächstes Blatt!

6. Prüfungsaufgabe 5a) Sommer 2013:
Die Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert, weil

(a) sie streng monoton wachsend und von oben durch 3 beschränkt ist.

(b) sie streng monoton wachsend und von unten durch 2 beschränkt ist.

(c) sie streng monoton fallend und von oben durch 3 beschränkt ist.

(d) sie streng monoton fallend und von unten durch 2 beschränkt ist.

Abgabe der schriftlichen Aufgabe: Donnerstag den 17. Oktober 2013 in der Übungsstunde oder bis spätestens 13:00 im Fach Ihres Assistenten im HG J 68.