Serie 5

1. Wir stapeln DIN Ak - Blätter der Stärke 1 mm aufeinander (zuunterst ein DIN A0 - Blatt, darauf ein DIN A1 - Blatt, dann ein DIN A2 - Blatt usw.). Wie hoch wird der Stapel und wie gross ist sein Volumen, falls sich Formate

i) mit Seitenlängen grösser als 1 mm („technische Grenze“)

ii) mit Seitenlängen grösser als 10^{-7} cm („physikalische Grenze“)

iii) mit beliebig kleinen Seitenlängen („ideale Grenze“)

realisieren lassen?
Hinweis: Benutzen Sie Serie 4 Aufgabe 4.

2. Untersuchen Sie die Konvergenz folgender Reihen:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2^k}{k+3^k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-\sqrt{k}}{(k+\sqrt{k})^2}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k^{-1}+7)\,\cos(k\pi)}{\sqrt{k}+\pi}$

3. Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Welche Eigenschaften von f werden durch die folgenden Formeln beschrieben?

a) $\exists \alpha \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R} : \ f(x) = \alpha.$

b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}\, \exists x \in \mathbb{R} : \ f(x) \geq \alpha.$

c) $\exists \alpha \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R} : \ f(x + \alpha) = f(x).$

Bitte wenden!

4. Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\qquad x \mapsto 2x - 6 \\ f_2 : \mathbb{R} \to [0, \infty), &\qquad x \mapsto |x| \\ f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\qquad x \mapsto \min\{x^2 - 9, 0\} \\ f_4 : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}, &\qquad x \mapsto \tfrac{x+1}{f_1(x)}. \end{aligned}$$

a) Untersuchen Sie alle Funktionen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

b) Skizzieren Sie auf dem Intervall $[-5, 5]$ die Funktionen $g := f_3 - f_1$,

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f_3(x) - f_1(x),$$

und $h := f_2 \circ g$,

$$h : \mathbb{R} \to [0, \infty), \qquad x \mapsto f_2(g(x)).$$

c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f_4^{-1} : \mathrm{im}(f_4) \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

5. Online-Abgabe

1. Prüfungsaufgabe 5b) Sommer 2013:
Welche der folgenden Begründungen für Aussagen über eine Reihe ist logisch korrekt?

(a) Die Reihe hat unendlich viele Glieder, die alle grösser als Null sind; daher divergiert die Reihe.

(b) Bei jedem Schritt addiert man weniger dazu als beim vorangegangenen; daher konvergiert die Reihe.

(c) Die Folge der Partialsummen der Reihe ist monoton; daher konvergiert die Reihe.

(d) Alle Glieder der Reihe sind positiv und die Reihe konvergiert; daher konvergiert die Reihe absolut.

Siehe nächstes Blatt!

2. Zu einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ betrachten wir folgende Aussagen:

1. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert.
2. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.
3. Die Folge $\{a_k\}$ konvergiert gegen 0.

Welche der folgenden Implikationen sind korrekt?

(a) $(1.) \Rightarrow (2.)$

(b) $(2.) \Rightarrow (1.)$

(c) $(1.) \Rightarrow (3.)$

(d) $(3.) \Rightarrow (1.)$

(e) $(2.) \Rightarrow (3.)$

(f) $(3.) \Rightarrow (2.)$

3. Welche der Reihen divergieren?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}}$.

(e) Keine der Reihen divergiert.

Bitte wenden!

4. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$

(a) konvergiert absolut.

(b) konvergiert, aber nicht absolut.

(c) divergiert.

(d) konvergiert, aber besitzt verschiedene Grenzwerte.

5. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Es existiert eine Surjektion $\{3, 456, 1346\} \to \{\mathbb{N}, \mathbb{R}\}$.

(b) Es existiert eine Injektion $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 5x + 6 = 0\} \cup \{0, 1\} \to \{x \in \mathbb{N} \,|\, 10 < x^2 < 100\}$.

(c) Es existiert eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ (hier ist $0 \in \mathbb{N}$).

(d) Es existiert eine Injektion $\mathbb{N} \to \{x \in [-1000, 1000] \,|\, \sin(x) = 0\}$.

(e) Es existiert eine Injektion $\mathbb{N} \to [0, 1/2]$.

6. Was ist die geometrische Bedeutung der Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \colon (x, y) \mapsto (y, x)$?

(a) Spiegelung an der y-Achse.

(b) Spiegelung an der x-Achse.

(c) Drehung um $\pi/2$ im Uhrzeigersinn.

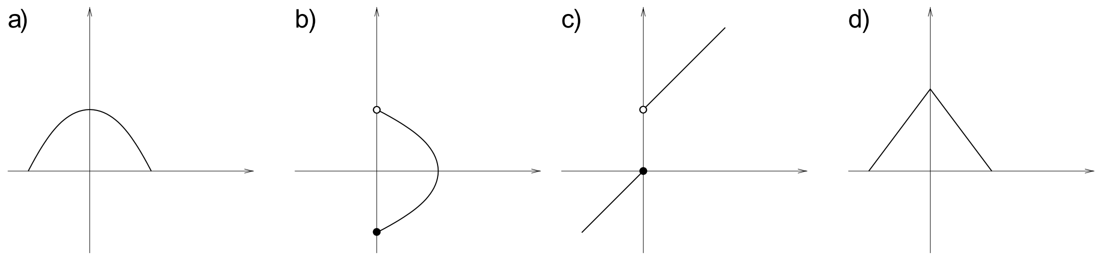
(d) Drehung um $\pi/2$ gegen den Uhrzeigersinn.

(e) Drehung um π.

(f) Spiegelung an der Geraden $x = y$.

Siehe nächstes Blatt!

7. Welche der folgenden Teilmengen sind Graphen von Funktionen?



(a) Nur (a).

(b) Nur (a) und (b).

(c) Nur (a) und (d).

(d) Nur (a), (c) und (d).

(e) Nur (c) und (d).

8. Welche der folgenden Funktionen $]-1,1[\to \mathbb{R}$ sind streng monoton wachsend?

(a) $x \mapsto x^2$

(b) $x \mapsto |x| + x$

(c) $x \mapsto x^3 - x$

(d) $x \mapsto e^x$

(e) $x \mapsto \arccos x$

(f) Keine.

Bitte wenden!

9. Die auf allen reellen Zahlen definierten Funktionen f und g seien ungerade. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**?

(a) Die Funktion $f + g$ ist ungerade.

(b) Die Funktion $f - g$ ist ungerade.

(c) Die Funktion $f \cdot g$ ist ungerade.

(d) Die Funktion $f/g \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ist gerade (hier wird $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon g(x) \neq 0$ angenommen).

10. Gegeben seien vier Funktionen $f_i : D_i \to Z_i, i = 1, 2, 3, 4$. Welches f_i besitzt *keine* Umkehrfunktion $f^{-1} : Z_i \to D_i$?

(a) $f_1 : [-2, 2] \to [-16, 16],\ x \mapsto x^3 - 12x$

(b) $f_2 : [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \to [-1, 1],\ x \mapsto \sin x$

(c) $f_3 : [1, 4] \to [1, 16], x \mapsto x^2$

(d) $f_4 : [2, 4] \to [-16, 24], x \mapsto x^3 - 12x$

(e) Alle besitzen eine Umkehrfunktion.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Donnerstag den 24. Oktober 2013 in der Übungsstunde oder bis spätestens 13:00 im Fach Ihres Assistenten im HG J 68.