Serie 7

1. a) Prüfungsaufgabe 3 Winter 2009:

Die Koeffizienten der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ seien gegeben durch

$$a_0 = 2 \qquad \text{und} \qquad a_n = \frac{2(n+1)}{n} \cdot a_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Ermitteln Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe und zeigen Sie, dass diese im Inneren ihres Konvergenzkreises der Funktion $f(x) = \frac{2}{(1-2x)^2}$ entspricht.

b) Prüfungsaufgabe 3 Sommer 2008:

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \frac{2}{1-x+x^2-x^3}$ in eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

Hinweis: Führen Sie zunächst eine Partialbruchzerlegung von $f(x)$ durch.

2. Prüfungsaufgabe 2 Winter 2012:

a) Eine Funktion $f : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n.$$

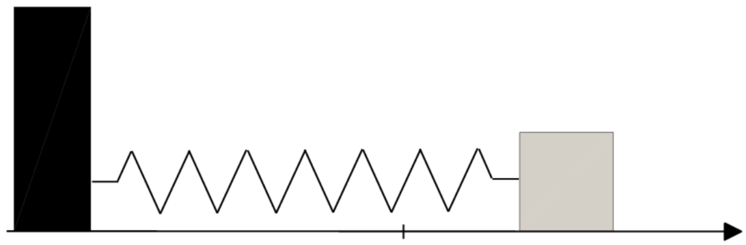
Ermitteln Sie den Konvergenzradius ρ dieser Potenzreihe.

b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f derart, dass $F(0) = 0$. Stellen Sie F zunächst als Potenzreihe und anschliessend als elementare Funktion dar.

c) Verwenden Sie F um eine Darstellung von f als elementare Funktion zu erhalten.

Bitte wenden!

3. Harmonischer Oszillator:



Eine Masse m, welche mit einer Feder der Federkonstante k verbunden ist und entlang der x-Achse reibungsfrei schwingt, genügt der Gleichung

$$x''(t) = -\frac{k}{m}\, x(t).$$

Dabei bezeichnet $x(t)$ die Auslenkung aus der Ruhelage $x = 0$ zum Zeitpunkt t. Die Vorgabe von sogenannten Anfangswerten $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$ für Auslenkung bzw. Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ legt die Bewegung der Masse eindeutig fest.

Wir betrachten nun einen Spezialfall dieses physikalischen Problems und nehmen im Folgenden an, dass $\frac{k}{m} = 1$, $x_0 = 0$ und $v_0 = 1$. Wir wollen diesen Spezialfall nun mit Hilfe von Potenzreihen lösen, indem wir $f(x)$ anstelle von $x(t)$ schreiben.

Gesucht ist also eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ mit

$$f''(x) = -f(x) \quad \text{für alle } x \text{ und} \quad f(0) = 0, \;\; f'(0) = 1.$$

Bestimmen Sie sämtliche Koeffizienten a_k der gesuchten Potenzreihe.

Siehe nächstes Blatt!

4. Online-Abgabe

1. Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot x^k$ ist

(a) 0.

(b) $\frac{1}{2}$.

(c) 1.

(d) 2.

(e) ∞.

2. Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ ist

(a) 0.

(b) 1.

(c) e.

(d) ∞.

3. Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{5^{n^2} n^n} x^n$

(a) konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) besitzt einen Konvergenzradius $\rho < \infty$ und konvergiert auf $(-\rho, \rho)$.

(c) besitzt einen Konvergenzradius $\rho < \infty$ und konvergiert auf $[-\rho, \rho)$.

(d) besitzt einen Konvergenzradius $\rho < \infty$ und konvergiert auf $[-\rho, \rho]$.

(e) besitzt einen Konvergenzradius $\rho < \infty$ und konvergiert auf $(-\rho, \rho]$.

Bitte wenden!

4. Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n}$ beträgt

(a) 0.

(b) $\frac{1}{3}$.

(c) $\frac{1}{9}$.

(d) 3.

(e) 9.

(f) ∞.

5. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n}$

(a) konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) besitzt einen Konvergenzradius $\rho < \infty$ und konvergiert auf $(-\rho, \rho)$.

(c) besitzt einen Konvergenzradius $\rho < \infty$ und konvergiert auf $[-\rho, \rho)$.

(d) besitzt einen Konvergenzradius $\rho < \infty$ und konvergiert auf $[-\rho, \rho]$.

(e) besitzt einen Konvergenzradius $\rho < \infty$ und konvergiert auf $(-\rho, \rho]$.

Siehe nächstes Blatt!

6. Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n}}(x+3)^n$ konvergiert

(a) für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) für alle $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(c) für alle $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(d) für alle $x \in [-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2})$.

(e) für alle $x \in (-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}]$.

7. Welche der folgenden Funktionen stellt die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kx^k$ dar?

(a) $(1-x)^{-1}$

(b) $(1-x)^{-2}$

(c) $(1+x)^{-2}$

(d) $x \cdot (1-x)^{-2}$

(e) $x \cdot (1-x)^{-3}$

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Donnerstag den 7. November 2013 in der Übungsstunde oder bis spätestens 13:00 im Fach Ihres Assistenten im HG J 68.