D-BAUG | Analysis I | HS 2013
Dr. Meike Akveld

Serie 8

1. Berechnen Sie die Taylorreihe um $x_0 = 0$ der folgenden Funktionen f.

a) $f(x) = \ln(1+x)$

b) $f(x) = x^2 \ln(1+x^4)$

c) $f(x) = e^{-x}\cos(x)$
Hinweis: Es gilt $e^{-x}\cos(x) = \text{Re}\left(e^{-x}e^{ix}\right) = \text{Re}\left(e^{(i-1)x}\right)$.

2. Berechnen Sie den Wert folgender Ausdrücke:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(2x)-1}{1-\cos x}$

c) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+5x^2-1} - x\right)$

3. Prüfungsaufgabe 2 Winter 2011:

a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\tan x}$.

b) Bestimmen Sie das vierte Taylorpolynom der Funktion $f(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}$ um den Punkt $x_0 = 0$.

4. Approximieren Sie folgende Ausdrücke für x nahe 0 durch ihr zweites Taylorpolynom. *Skizzieren* Sie die Funktion aus Teilaufgabe **a)** zusammen mit ihren Taylorpolynomen nullter, erster und zweiter Ordnung im Intervall $\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ **b)** $\dfrac{1}{\cos x}$

Bitte wenden!

5. Zusatzaufgabe zur Repetition: Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int (x^3 + 4x - 5)\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int e^{-4x}\,\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int \sqrt{3x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \cos(5x - 2)\,\mathrm{d}x$ **e)** $\displaystyle\int \cosh(5x - 2)\,\mathrm{d}x$ **f)** $\displaystyle\int (2x - 5)^{-3/2}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x$ **h)** $\displaystyle\int_9^{65} \frac{1}{3x-3}\,\mathrm{d}x$

6. Online-Abgabe

1. Wie berechnet man die Potenzreihe um $x_0 = 0$ der Funktion $x \mapsto \frac{1}{x^2+2x+1}$ mit möglichst wenig Aufwand?

(a) Alle Ableitungen bestimmen und die Formel für die Taylorreihe auswerten.

(b) Die Funktion als Quadrat von $\frac{1}{1+x}$ schreiben und die Reihe als Quadrat der Reihe für diese Funktion erhalten.

(c) Mit Hilfe eines Ansatzes und anschliessendem Koeffizientenvergleich.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = ?$

(a) 1

(b) 0

(c) $\frac{1}{2}$

(d) π

(e) Der Grenzwert existiert nicht.

Siehe nächstes Blatt!

3. $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x)}{\sin(x)} = ?$

(a) -1

(b) 0

(c) 1

(d) ∞

4. Durch zweifache Anwendung der Regel von de l'Hôpital folgt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3.$$

Was stimmt an dieser Überlegung nicht? Die Regel von de l'Hôpital ist ...

(a) nicht anwendbar, weil das Zählerpolynom jeweils einen höheren Grad als das Nennerpolynom hat.

(b) nicht anwendbar, weil die beiden ersten Brüche keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion beschreiben.

(c) auf den ersten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.

(d) auf den zweiten Bruch nicht anwendbar, weil Zähler und Nenner für $x \to 1$ nicht beide gegen 0 oder ∞ streben.

(e) durchaus anwendbar und die Überlegung ist richtig!

Bitte wenden!

5. Durch welche der folgenden Ausdrücke wird die Taylorreihe von $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 2$ an der Stelle 1 dargestellt?

(a) $x^3 - 5x^2 - x + 2$

(b) $(x-1)^3 - 5(x-1)^2 - (x-1) + 2$

(c) $(x-1)^3 - 2(x-1)^2 - 8(x-1) - 3$

(d) $x^3 - 2x^2 - 8x - 1$

6. Wie lautet das zweite Taylorpolynom $T_2(x)$ der Funktion $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$?

(a) $1 + \frac{x^2}{2}$

(b) $1 + x + \frac{x^2}{2}$

(c) $1 + x + x^2$

(d) $1 + x^2$

(e) Das gesuchte Polynom ist nicht unter diesen Antworten.

7. Wenn man zwei Funktionen addiert, dann werden ihre Taylorreihen an einem Punkt x_0

(a) addiert.

(b) addiert, aber man erhält die Taylorreihe an der Stelle $2x_0$.

(c) subtrahiert.

(d) multipliziert.

(e) es kann keine allgemein gültige Aussage getroffen werden.

Siehe nächstes Blatt!

8. Von einer Funktion f sei bekannt, dass

$$f(3) = 6, \qquad f'(3) = 8, \qquad f''(3) = 11, \qquad f^{(n)}(3) = 0,\ \forall n \geq 3.$$

Dabei seien f und $f^{(n)}$, $\forall n \geq 1$ stetige Funktionen auf $[3, 7]$. Dann gilt $f(7) =$

(a) 38.

(b) 126.

(c) 214.

(d) 331.5.

9. Das Taylorpolynom 3. Grades an der Stelle $x_0 = 0$ von $f(x) = \sin(2x)$ ist gegeben durch...

(a) $2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

(b) $2x - 4x^2 + \frac{16x^3}{3}$.

(c) $2x - \frac{x^3}{3}$.

(d) $2 + x - \frac{x^3}{6}$.

(e) $2x - \frac{4x^3}{3}$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Donnerstag den 14. November 2013 in der Übungsstunde oder bis spätestens 13:00 im Fach Ihres Assistenten im HG J 68.