D-BAUG
Dr. Meike Akveld

Analysis I

HS 2013

Serie 9

1. Abbildung 1 zeigt die Graphen der beiden Funktionen

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 5x - 2 \qquad \text{und} \qquad g(x) = 2x^2 - x - 2.$$

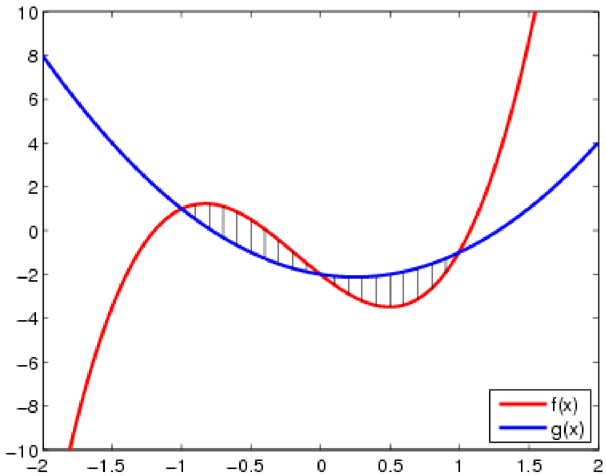

Abbildung 1: Die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ aus Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie die Stellen $x_1 < x_2 < x_3$, an denen sich die Graphen der beiden Funktionen schneiden.

b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{x_1}^{x_3} \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$.

c) Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche.

Bitte wenden!

2. Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int e^{2x} \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^1 t^2 \cdot \cosh(2t)\,\mathrm{d}t$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{99}^{100} \sqrt{x^5 - 99x^4}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{8\ln\left(\frac{1}{\tan x}\right)}{\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t(e^t + \frac{1}{t}e^t)}{e + te^t}\,\mathrm{d}t$

g) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x$ für $n, m \in \mathbb{N}$

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $m = n$ und $m \neq n$.

3. **a)** Skizzieren Sie die Funktion $f_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = \frac{1}{k} \quad \text{für } x \in [k-1, k).$$

Was ist der Zusammenhang zwischen der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ und dem Integral $\int_0^{\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x$? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Zeigen Sie die **Divergenz** der harmonischen Reihe, indem Sie eine Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $0 \leq g(x) \leq f_1(x)$ finden, so dass $\displaystyle\int_0^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \infty$.

c) Für die Funktion $f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f_2(x) = \frac{1}{k^2} \quad \text{für } x \in [k-1, k),$$

gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\infty} f_2(x)\,\mathrm{d}x$. Zeigen Sie, dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ **konvergiert**, indem Sie eine Funktion $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $h(x) \geq f_2(x)$ finden, so dass $\displaystyle\int_0^{\infty} h(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.

d) Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ mit $\alpha > 1$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Siehe nächstes Blatt!

4. Online-Abgabe

1. Falls $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$ folgt $\forall x \in [0,1]\colon f(x) = 0$.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

2. Seien F, G Stammfunktionen von $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$. Welche der Aussagen gelten?

(a) $F + G$ ist eine Stammfunktion von $f + g$.

(b) FG ist eine Stammfunktion von fg.

(c) Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $F + c$ eine Stammfunktion von f.

(d) FG ist eine Stammfunktion von $fG + Fg$.

3. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ rational ist,} \\ 1 & \text{falls } x \text{ irrational ist.} \end{cases}$$

Ist f Riemann-integrierbar oder nicht? Und was ist die richtige Begründung? Die Funktion f ist ...

(a) integrierbar, weil sie beschränkt ist.

(b) nicht integrierbar, weil sie unstetig ist.

(c) integrierbar, weil die Stellen mit $f(x) = 0$ vernachlässigbar sind und sie ansonsten mit einer konstanten Funktion übereinstimmt.

(d) nicht integrierbar, weil sie in jedem Teilintervall von $[0,1]$ beide Werte 0 und 1 annimmt und daher die Riemann-Summen nicht konvergieren.

Bitte wenden!

4. Welche der folgenden Funktionen sind für $x > 0$ monoton wachsend?

(a) $x \mapsto \int_0^x t \,\mathrm{d}t$

(b) $x \mapsto \int_0^x t^2 \,\mathrm{d}t$

(c) $x \mapsto \int_0^x \sin t \,\mathrm{d}t$

(d) $x \mapsto \int_0^x \sin^2 t \,\mathrm{d}t$

5. Die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$, der x-Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ lässt sich berechnen mittels

(a) $\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$.

(b) $\int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x$.

(c) $\left| \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \right|$.

6. Die Formel

$$\int f(x) \,\mathrm{d}x = xf(x) - \int xf'(x) \,\mathrm{d}x$$

(a) ist im Allgemeinen falsch.

(b) folgt aus der Substitutionsregel.

(c) folgt aus der partiellen Integration.

(d) folgt aus dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.

7. Welche der folgenden Rechnungen ist **keine** korrekte Anwendung der partiellen Integration?

(a) $\displaystyle\int \sin\phi \cdot \cos\phi \, \mathrm{d}\phi = -\cos\phi \cdot \cos\phi - \int \cos\phi \cdot \sin\phi \, \mathrm{d}\phi$

(b) $\displaystyle\int \sin\phi \cdot \cos\phi \, \mathrm{d}\phi = \sin\phi \cdot \sin\phi - \int \cos\phi \cdot \sin\phi \, \mathrm{d}\phi$

(c) $\displaystyle\int x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int 2x^2 e^{x^2} \, \mathrm{d}x = xe^{x^2} - \int e^{x^2} \, \mathrm{d}x$

(e) Alle sind korrekte Anwendungen der partiellen Integration.

8. Geben Sie die Formel für die n-te Untersumme U_n der Funktion $f(x) = e^x$ im Intervall $[0, 1]$ an.

Hinweis: Geometrische Reihe.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{e^x}{n}$

(b) $\displaystyle\frac{1}{n}\frac{1-e}{1-e^{1/n}}$

(c) $\displaystyle\frac{1}{n}\frac{1-e^{1+1/n}}{1-e^{1/n}}$

(d) $e - 1$

Bitte wenden!

9. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} U_n$ mit U_n aus der vorherigen Aufgabe.

(a) $e - 1$

(b) e^x

(c) 1

(d) 0

(e) ∞

10. Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x$.

(a) $e - 1$

(b) e^x

(c) 1

(d) 0

(e) $\ln(1) - \ln(0)$

11. Wie lautet die Ableitung der Funktion $f(x) = \int_{-\cos x}^{\cos x} (1 + 2\sin t) \, \mathrm{d}t$?

(a) $f'(x) = 4\sin(\cos x)$

(b) $f'(x) = 4\sin(\cos x) + 2\cos x$

(c) $f'(x) = -2\sin x$

(d) $f'(x) = 2\sin(\cos x) + \cos x$

Siehe nächstes Blatt!

12. Sei f eine Funktion. Welche der folgenden Implikationsketten sind wahr?

(a) f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist integrierbar.

(b) f ist integrierbar $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig.

(c) f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist integrierbar.

(d) f ist integrierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar.

(e) Keine!

13. Lösen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

(a) $\frac{x^2}{x+1} + C$

(b) $x - \frac{1}{x+1} + C$

(c) $\frac{2}{(x+1)^3}$

(d) $\frac{x^2+x+2}{x+1} + C$

(e) keines davon

14. Lösen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$.

(a) $\arcsin(\frac{x}{2}) + C$

(b) $\arccos(\frac{x}{2}) + C$

(c) $\frac{1}{2}\arccos(\frac{x}{2}) + C$

(d) $\frac{1}{2}\arcsin(\frac{x}{2}) + C$

(e) keines davon

15. Welches der folgenden Integrale stimmt im Allgemeinen nicht mit den anderen überein?

(a) $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}u$

(c) $\int_b^a (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$

(d) $\int_a^b (f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t$

16. Wir rechnen

$$\begin{aligned} f(x) = (x-1)^4 &= \int 4(x-1)^3\,\mathrm{d}x = \int (4x^3 - 12x^2 + 12x - 4)\,\mathrm{d}x \\ &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = g(x) \end{aligned}$$

und erhalten daraus durch Einsetzen $1 = f(0) = g(0) = 0$. Wo liegt der Fehler?

(a) Man darf nicht einsetzen.

(b) Die binomische Formel wurde falsch angewendet.

(c) Die Integrationskonstante fehlt.

(d) Es ist trotzdem richtig, weil man Konstanten vernachlässigen darf.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Donnerstag den 21. November 2013 in der Übungsstunde oder bis spätestens 13:00 im Fach Ihres Assistenten im HG J 68.