Serie 10

1. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) Prüfungsaufgabe 4c) Sommer 2012:

$$\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} \, \mathrm{d}x$$

b) Prüfungsaufgabe 4c) Winter 2012:

$$\int \frac{x^2 + 6}{x^3 - 7x^2 + 18x - 12} \, \mathrm{d}x$$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$

Hinweis zu c): Benutzen Sie zur Integration die Reihenentwicklung von $\frac{\sin x}{x}$ und berechnen Sie anschliessend eine Näherung auf drei Nachkommastellen.

2. Für die Hyperbel mit der Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ (siehe Abbildung 1) betrachten wir die Parametrisierung

$$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie den Inhalt der grau markierten Fläche in Abbildung 1, welche von der x-Achse, der Hyperbel und dem Leitstrahl vom Ursprung zum Punkt $r(T)$ begrenzt wird.

Hinweis: Verwenden Sie hierfür die Formel

$$F = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \big(x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t) \big) \, \mathrm{d}t$$

aus der Vorlesung. Die Integrationsgrenzen t_1 und t_2 müssen Sie geeignet bestimmen.

Bitte wenden!

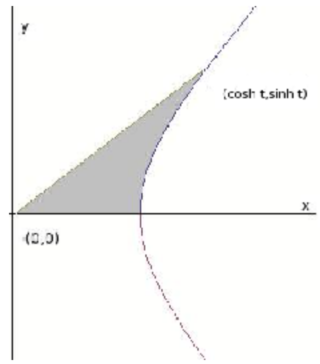

Abbildung 1: Die Hyperbel aus Aufgabe 2. Die gesuchte Fläche ist grau hinterlegt.

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Inhalt dieser Fläche und dem Parameter T?

3. **a)** Berechnen Sie die Länge der Kurve, welche parametrisiert ist durch

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}\cos(5t) \\ \mathrm{e}^{-t}\sin(5t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Die Kurve ist in Abbildung 2 auf der linken Seite skizziert.

b) Bestimmen Sie die Länge der Kurve, welche der Gleichung

$$y^2 = 1 - |x|$$

genügt. Die Kurve ist in Abbildung 2 auf der rechten Seite dargestellt.

c) Welche Länge besitzt die Kurve aus Teilaufgabe a), wenn man $t \in [0, 2\pi]$ durch $t \in [0, \infty)$ ersetzt?

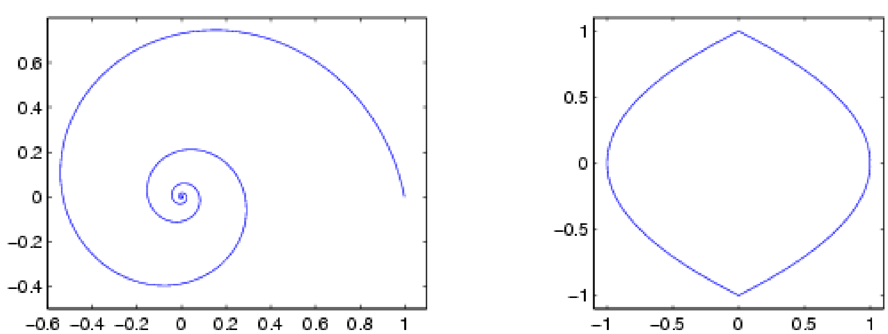

Abbildung 2: Die Kurven aus Aufgabe 3a) (links) und 3b) (rechts).

Siehe nächstes Blatt!

4. Ein Kreisel werde erzeugt durch Rotieren der Funktion

$$f(x) = x^{\frac{3}{5}}, \qquad 0 \le x \le 1$$

um die y-Achse. Die Massenverteilung innerhalb des Kreisels sei beschrieben durch die Dichte

$$\varrho(y) = 2 - y, \qquad 0 \le y \le 1.$$

a) Berechnen Sie die Gesamtmasse des Kreisels.

b) Auf welcher Höhe liegt der Schwerpunkt?

5. Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen einer Kugel mit Radius 1, aus der ein zylinderförmiges Loch mit Radius $a < 1$ symmetrisch zum Mittelpunkt herausgebohrt wurde.

6. Online-Abgabe

1. Eine geschlossene Kurve $[0,1] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto (x(t), y(t))$ wird um den Faktor $a > 0$ gestreckt, das heisst, man erhält eine neue Kurve $[0,1] \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto (ax(t), ay(t))$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das $\sqrt{a}$-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve.

(b) Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das a-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve.

(c) Die Bogenlänge der neuen Kurve ist das a^2-te Vielfache der Bogenlänge der alten Kurve.

(d) Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das $\sqrt{a}$-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

(e) Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das a-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

(f) Die eingeschlossene Fläche der neuen Kurve ist das a^2-te Vielfache der eingeschlossenen Fläche der alten Kurve.

Bitte wenden!

2. Wir bezeichnen für $i = 1, 2$ mit K_i den Rotationskörper, der durch Rotation einer nichtnegativen stetigen Funktion $f_i \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ an der x-Achse entsteht. Welche Aussagen sind wahr?

(a) Falls f_1 und f_2 dasselbe Integral haben, haben K_1 und K_2 dasselbe Volumen.

(b) Falls für alle $t \in [0,1]$ gilt $f_1(t) \leq f_2(t)$, gilt $\text{vol}(K_1) \leq \text{vol}(K_2)$.

(c) Falls für ein $a > 0$ und für alle $t \in [0,1]$ gilt $f_1(t) = af_2(t)$, gilt $\text{vol}(K_1) = a\text{vol}(K_2)$.

(d) Falls für ein $a > 0$ und für alle $t \in [0,1]$ gilt $f_1(t) = af_2(t)$, gilt $\text{vol}(K_1) = a^2\text{vol}(K_2)$.

(e) Falls für ein $a > 0$ und für alle $t \in [0,1]$ gilt $f_1(t) = af_2(t)$, gilt $\text{vol}(K_1) = a^3\text{vol}(K_2)$.

(f) Der Rotationskörper, der entsteht, wenn man f_1 und f_2 addiert und rotiert, hat Volumen $\text{vol}(K_1) + \text{vol}(K_2)$.

(g) Der Rotationskörper, der entsteht, wenn man f_1 und f_2 multipliziert und rotiert, hat Volumen $\text{vol}(K_1) \cdot \text{vol}(K_2)$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Donnerstag den 28. November 2013 in der Übungsstunde oder bis spätestens 13:00 im Fach Ihres Assistenten im HG J 68.