Serie 11

1. Es schneit mit einer konstanten Menge Schnee pro Minute und Quadratmeter. Ein Schneepflug beginnt die Räumungsarbeiten um 12 Uhr. In der ersten Stunde fährt er 2 km weit, in der zweiten Stunde 1 km. Wir setzen voraus, dass die Geschwindigkeit des Schneepflugs umgekehrt proportional zur Höhe der Schneedecke ist. Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Höhe $h(t)$ der gesamten Schneedecke auf. Wann hat es zu schneien begonnen?

2. Finden Sie eine Differentialgleichung, in der sowohl $y(x)$ als auch eine der ersten beiden Ableitungen $y'(x)$ bzw. $y''(x)$ vorkommen, so dass die jeweils gegebene Funktion y eine Lösung dieser Differentialgleichung ist:

a) $y(x) = x^\alpha + 5x^\beta, \quad \alpha, \beta > 0$

b) $y(x) = 2^{\lambda x^2}$

c) $y(x) = \tanh(x)$

d) $y(x) = a\sin(7x) + b\cos(7x), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

3. Berechnen Sie jeweils **alle** Lösungen der Differentialgleichungen:

a) $y'(x) = e^{y(x)}\sin(x)$

b) $y'(x) = x\,y^2(x) + x$

c) $y'(x) = \lambda y(x)$

d) $y''(x) = -\omega^2 y(x), \quad \omega^2 > 0$

Hinweis: In Teil **c)** und **d)** ist es möglich, die Lösungen durch Ausprobieren zu finden.

4. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) = x^2 - 2xy + y^2, \qquad y(0) = 0. \tag{1}$$

a) Zeichnen Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung im Bereich $[0,3] \times [0,3]$. Entlang welcher Linien hat y' jeweils konstante Werte?

b) Warum kann die Differentialgleichung nicht mittels Separation der Variablen gelöst werden?

Bitte wenden!

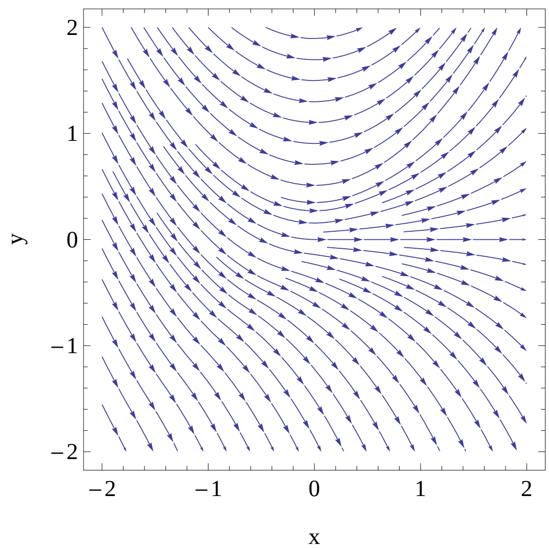
c) Substituieren Sie $y(x)$ durch ein geeignetes $u(x)$, so dass die auf $u(x)$ transformierte Differentialgleichung (1) separierbar wird.

d) Lösen Sie die transformierte Differentialgleichung. Berechnen Sie anschliessend aus der gefundenen Lösung $u(x)$ die Funktion $y(x)$.

e) Zeichnen Sie $y(x)$ in Ihre Skizze aus Teil **a)** ein.

5. Online-Abgabe

1. Welche der folgenden Differentialgleichungen hat das gegebene Richtungsfeld?



(a) $y' = x + y.$

(b) $y' = x - y.$

(c) $y' = \min\{x, y\}.$

(d) $y' = \max\{x, y\}.$

(e) $y' = |y| - |x|.$

Siehe nächstes Blatt!

2. Betrachten Sie die Tangente an den Graphen der Funktion $x \mapsto y(x)$ im Punkt $(x, y(x))$. Wie lautet die Differentialgleichung dafür, dass diese Tangente die x-Achse im vorgegebenen Abstand c vom Punkt $(x, 0)$ schneidet?

(a) $x - \frac{y}{y'} = c$.

(b) $\frac{y}{y'} = c$.

(c) $yy' = c$.

(d) $\left|\frac{y}{y'}\right| = c$.

3. Trennen Sie die Variablen der Differentialgleichung

$$y' = \ln(x+1)y + \ln(x+1).$$

(a) $\frac{\mathrm{d}y}{y} = (\ln(x+1) + 1)\,\mathrm{d}x$.

(b) $y\,\mathrm{d}y = \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

(c) $y\,\mathrm{d}y = \ln(x+1)^2\,\mathrm{d}x$.

(d) $\frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

(e) Das ist nicht möglich.

4. Klicken Sie die **falsche** Aussage an:

Die Differentialgleichung $\frac{x^2}{2}y'' - xy' + y = 0$

(a) besitzt die Funktion $y : x \mapsto x$ als Lösung.

(b) besitzt die Funktion $y : x \mapsto x^2$ als Lösung.

(c) besitzt unendlich viele Lösungen.

(d) besitzt genau zwei Lösungen.

5. Klicken Sie die **richtige** Aussage an.

Gegeben ist die Differentialgleichung $y'y'' - yy''' = 0$. Wieviele Parameter erwarten Sie in der allgemeinen Lösung?

(a) Keinen Parameter.

(b) Einen Parameter.

(c) Zwei Parameter.

(d) Drei Parameter.

(e) Vier Parameter.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Donnerstag den 5. Dezember 2013 in der Übungsstunde oder bis spätestens 13:00 im Fach Ihres Assistenten im HG J 68.