

Serie 12

1. a) Berechnen Sie die Orthogonaltrajektorien für die Familie von Kurven

$$y_c = cx^4, \quad c \in \mathbb{R}$$

und skizzieren Sie diese.

- b) Berechnen Sie die Orthogonaltrajektorien für die Familie von Kurven

$$y_c = c \sin x, \quad c \in \mathbb{R}$$

und skizzieren Sie diese.

2. Einem Patient wird per Infusion ein Medikament verabreicht. Pro Minute gelangen 0,1 mg ins Blut. Gleichzeitig baut die Niere pro Minute 5% der im Blut vorhandenen Medikamentenmenge ab. Stellen Sie eine Differentialgleichung für die momentane Medikamentenmenge $M(t)$ im Blut auf und lösen Sie diese. Wie viel des Medikaments wird sich auf lange Sicht im Blut befinden?

3. Prüfungsaufgabe 4 Sommer 2013:

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{2}{1+x^2} \cdot y(x) = 8$$

für $x > 0$ mit der Nebenbedingung $y(1) = 4$.

4. a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' + 5y'' - y' - 5y = 0.$$

- b) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + y' = 0$$

zu der Anfangsbedingung $y(1) = y'(1) = 2$.

c) Die Differentialgleichung

$$f'' + 2qf' + (q + q^2)f = 0$$

enthält einen (reellen) Parameter q . Für welche Werte von q bleiben **alle** Lösungen für $x \rightarrow \infty$ beschränkt?

Hinweis: Sorgfältige Fallunterscheidung für Nullstellen des charakteristischen Polynoms!

d) Bestimmen Sie die allgemeine (reelle) Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0,$$

welche die Anfangsbedingungen

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y^{(3)}(0) = 1$$

erfüllt.

5. Online-Abgabe

1. Welche der folgenden Differentialgleichungen ist linear?

(a) $y' + y^2 + x = 0$

(b) $y'^2 + y + x = 0$

(c) $y' + x^2y = 0$

(d) $y' + xy^2 = 0$

Siehe nächstes Blatt!

2. Mit *Variation der Konstanten* für eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung meint man

- (a) die Tatsache, dass die Lösung der Differentialgleichung nur bis auf eine Konstante bestimmt ist.
- (b) die Art, wie die Lösung von den in der Differentialgleichung vorkommenden Konstanten abhängt.
- (c) das Verfahren, zuerst die allgemeine Lösung zu bestimmen und danach die Integrationskonstante zu berechnen, welche die gegebene Anfangsbedingung garantiert.
- (d) den Ansatz $y(x) = C(x) \cdot Y(x)$ für eine Lösung $Y(x)$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer noch zu bestimmenden Funktion $C(x)$.

3. Wie lautet die charakteristische Gleichung der DGL $y''' + 2y' + y = 0$?

- (a) $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$
- (b) $\lambda^3 + 2\lambda = 0$
- (c) $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$
- (d) $1 + 2\lambda^2 + \lambda^3 = 0$
- (e) Keine.

Bitte wenden!

4. Welche Substitution macht die folgende Differentialgleichung separierbar?

$$y' + \frac{y}{x} = xy^2$$

- (a) $y = ux$
- (b) $y = u/x$
- (c) $y = 1/u$
- (d) $y = x/u$

5. Welche der folgenden Aussagen über lineare DGLn 2. Ordnung ist korrekt?

- (a) Die allgemeine Lösung von $y'' - 2y' + y = 0$ ist $y(x) = C_1e^x + C_2xe^x$.
- (b) Die allgemeine Lösung von $y'' - 2y' + y = 0$ ist $y(x) = C_1e^x + C_2e^x$.
- (c) Keine.

6. Welche der folgenden Aussagen über lineare DGLn 2. Ordnung ist korrekt?

- (a) Die allgemeine Lösung von $y'' - \omega^2y = 0$ (mit $\omega \neq 0$ konstant) ist

$$y(x) = C_1e^{\omega x} + C_2xe^{-\omega x}.$$

- (b) Die allgemeine Lösung von $y'' - \omega^2y = 0$ (mit $\omega \neq 0$ konstant) ist

$$y(x) = C_1e^{\omega x} + C_2e^{-\omega x}.$$

- (c) Keine.

Siehe nächstes Blatt!

7. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- (a) Jede separierbare Differentialgleichung ist eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.
- (b) Jede lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.
- (c) Jede homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.
- (d) Jede homogene Differentialgleichung 1. Ordnung ist separierbar.

8. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung $y'' + 3y' + 2y = 0$ ist falsch?

- (a) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 1 - e$.
- (b) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$ und $y(1) = 0$.
- (c) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1 - e$ und $y(1) = 0$.
- (d) Es existiert eine Lösung mit $y(0) = 1$ und $y(x)$ beschränkt für $x \rightarrow \infty$.
- (e) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1$ und $y(x)$ beschränkt für $x \rightarrow -\infty$.

9. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung $y'' + 3y' + 2y = 0$ ist falsch?

- (a) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
- (b) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -3$.
- (c) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$.
- (d) Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Bitte wenden!

10. Die DGL $y'(x)^2 + y(x)^2 = 0$ hat unendlich viele Lösungen.

- (a) Wahr
- (b) Falsch

11. Die DGL $y'(x)^2 + y(x)^2 = 0$ hat genau eine reelle Lösung.

- (a) Wahr
- (b) Falsch

12. Die DGL $y'(x)^2 + y(x)^2 = 0$ ist nicht lösbar.

- (a) Wahr
- (b) Falsch

13. Die DGL $y'(x)^2 + y(x)^2 = 0$ hat reelle Lösungen mit $|y(x)| \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$.

- (a) Wahr
- (b) Falsch

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Donnerstag den 12. Dezember 2013 in der Übungsstunde oder bis spätestens 13:00 im Fach Ihres Assistenten im HG J 68.