# Serie 13

**1.** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen und lösen Sie in c) und d) das zugehörige Anfangswertproblem:

**a)** $2y'' + 3y' + 10y = \sin(2x) + 1$

**b)** $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x$

**c)** $y'' - y = \cosh(x), \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e^{-1}$

**d)** $y' - 2y = x^2 e^{2x}, \quad y(0) = -3$

**2.** Eine Masse $m$, welche mit einer Feder der Federkonstante $f$ verbunden ist und entlang der $x$-Achse reibungsfrei schwingt, wird durch eine sinusförmige äussere Kraft mit Frequenz $\nu$ angeregt. Die Auslenkung der Masse genügt der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \sin(\nu t),$$

wobei $\omega = \sqrt{\frac{f}{m}}$ die sogenannte Eigenfrequenz des Masse-Feder-Systems ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll sich die Masse an der Stelle $x = 0$ in Ruhe befinden: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

**a)** Lösen Sie die Differentialgleichung für den Fall $\omega \neq \nu$ (keine Resonanz).

**b)** Lösen Sie die Differentialgleichung für den Fall $\omega = \nu$ (Resonanz).

**c)** Skizzieren Sie die Ergebnisse aus **a)** und **b)** auf dem Zeitintervall $[0, 10\pi]$ für $\omega = 1, \nu = \frac{1}{2}$ bzw. $\omega = \nu = 1$. Was beobachten Sie?

**3.** Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

**a) Prüfungsaufgabe 5 Winter 2012:**

$$y''(x) + 2y'(x) = 3x\mathrm{e}^x, \quad y(0) = \frac{4}{3}, \quad y'(0) = 0.$$

**b) Prüfungsaufgabe 5 Sommer 2012:**

$$y'(x) \cdot (x+1) + y(x) = x^3, \quad y(0) = \sqrt{5}\,.$$

**Bitte wenden!**

## 4. Online-Abgabe

**1.** Wie lautet die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung

$$y''' + 2y' + y = x^2 + 5?$$

(a) $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$

(b) $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = x^2 + 5$

(c) $\lambda^3 + 2\lambda = 0$

(d) $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

(e) $1 + 2\lambda^2 + \lambda^3 = 0$

**2.** Was kann man über eine Differentialgleichung der Form $y'' + ay' + by = e^x$ mit konstanten Koeffizienten $a$ und $b$ immer sagen?

(a) Ihre Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension $2$.

(b) Sie hat eine partikuläre Lösung der Gestalt $\alpha e^x$ für eine Konstante $\alpha$.

(c) Ihre allgemeine Lösung lautet $y_h(x) + \alpha e^x$ für eine Lösung $y_h$ der zugehörigen homogenen Gleichung sowie eine Konstante $\alpha$.

(d) Sie hat eine partikuläre Lösung der Gestalt $(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\, e^x$ für Konstanten $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

**Siehe nächstes Blatt!**

**3.** Welche der gegebenen Zahlen ist für die Lösung $y(x)$ des Anfangwertproblems

$$x \cdot y'(x) - y(x) = x, \quad y(1) = 1$$

die beste Approximation von $y(2)$?

(a) 2

(b) 4

(c) 5

(d) 7

**4.** Bestimmen Sie die Form der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 3e^{2x}.$$

(a) $C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x + 3e^{2x}$

(b) $C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} \sin x + axe^{2x}$

(c) $C_1 \cos x + C_2 \sin x + 3e^{2x}$

(d) $C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x + \frac{3}{2} e^{2x}$

**5.** Es sei bekannt, dass $y(x) = e^{2x}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 5y'(x) + ky(x) = 0$$

ist. Bestimmen Sie den Wert von $k \in \mathbb{R}$.

(a) -14

(b) -6

(c) -4

(d) 6

**6.** Was ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) = 0?$$

(a) $Ae^{2x} + Be^{5x}$

(b) $Ae^{2x} + Be^{-5x}$

(c) $Ae^{-2x} + Be^{5x}$

(d) $Ae^{-2x} + Be^{-5x}$

**7.** Betrachten Sie die Differentialgleichung $y'' - 7y = 0$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung sind 0 und 7.

(b) Diese Differentialgleichung hat keine charakteristische Gleichung.

(c) Die charakteristische Gleichung hat $\sqrt{7}$ als doppelte Nullstelle.

(d) Die Nullstellen der charakteristischen Gleichung sind $\pm\sqrt{7}$.

**8.** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + \frac{x}{1+x}\, y(x) = 1 + x.$$

(a) $1 + x + C$

(b) $C(1 + x)$

(c) $(1 + Ce^{-x})(1 + x)$

(d) $e^{-x}(x + \frac{x^2}{2} + C)(1 + x)$

**Keine Abgabe der schriftlichen Aufgaben.**