ETH Zürich, Basisprüfung
Analysis I/II D-BAUG Sommer 2012
Dr. Meike Akveld

Wichtige Hinweise

- Prüfungsdauer / Maximalpunktzahl
  - Basisprüfung Analysis I/II: Aufgaben 1–10, 240 Minuten, 63 Punkte
  - Semesterkurs Analysis II: Aufgaben 6–10, 120 Minuten, 32 Punkte
- Zugelassene Hilfsmittel: Bis zu 30 A4-Seiten (15 A4-Blätter) selbst verfasste Zusammenfassung (für Semesterkurs Analysis II: 15 A4-Seiten). Kein Taschenrechner!
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden! Der Lösungsweg ist stets klar und verständlich darzustellen! Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen!
- Die Prüfung umfasst 10 Aufgaben. Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl. Für eine 6 ist nicht die volle Punktzahl erforderlich.
- Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Bitte schreiben Sie auf **alle** abzugebenden Blätter Ihren Namen, füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus und notieren Sie dort Ihre Leginummer.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter nach Aufgaben geordnet abzugeben.

$* * *$ Viel Erfolg! $* * *$

---

1. a) [**2 P**] Bestimmen Sie den Real- und Imaginäteil der komplexen Zahl

$$z = \frac{4-8i}{3+4i} \; .$$

b) [**4 P**] Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene den Bereich, der die komplexen Zahlen z enthält, für welche folgende zwei Bedingungen gelten:

i) $\arg\left((1+i)^2\right) \leq \arg(z^2) \leq \arg(-7)$,

ii) $\left|\frac{1+2\sqrt{2}i}{e^{i\pi}}\right| \leq \left|\frac{z}{(1+i)^2}\right| \leq |3+4i|$.

Bitte wenden!

2. a) [**2 P**] Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sin \pi x} \ .$$

b) [**4 P**] Bestimmen Sie das Taylorpolynom vierter Ordnung der Funktion $f(x) = \cos(\sin(x))$ um $x_0 = 0$.

3. [**6 P**] Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \int_e^x \sqrt{\ln^2 t - 1}\, dt \tag{1}$$

und bestimmen Sie die Bogenlänge des Graphen von f über das Intervall $[e, e^3]$. Hinweis: Das Integral (1) kann nicht explizit berechnet werden.

4. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) [**2 P**] $\int e^{-2x} \sin 6x \, dx$.

b) [**2 P**] $\int_2^4 \frac{1}{x\sqrt{x-1}} \, dx$.

c) [**3 P**] $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} \, dx$.

5. [**6 P**] Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$y'(x) \cdot (x+1) + y(x) = x^3, \ y(0) = \sqrt{5} \ .$$

6. Sei S die Fläche des Graphen von $f(x,y) = 10 - x^2 - y^2$.

a) [**2 P**] Bestimmen Sie die Tangentialebene Σ zur Fläche S im Punkt $P = (0, 0, 10)$.

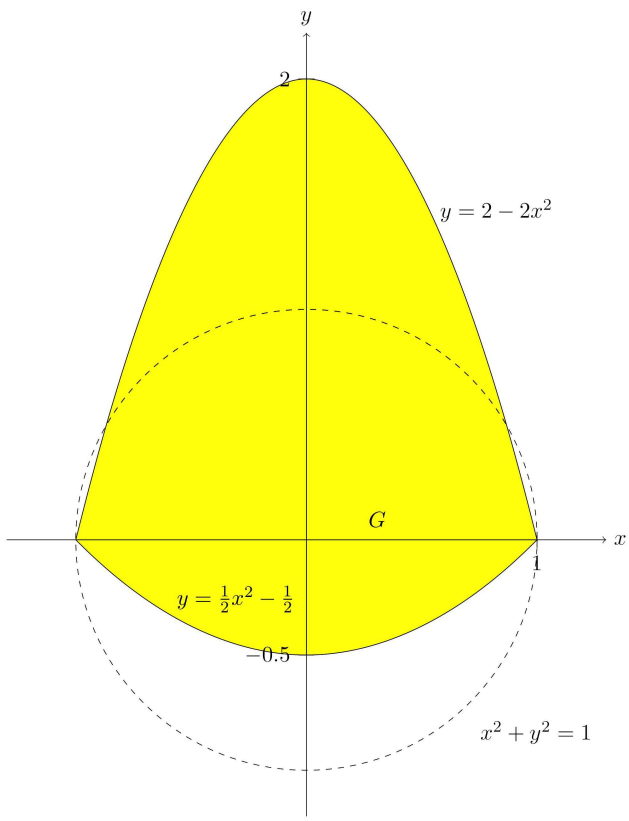
Die Temperatur an der Stelle (x, y, z) ist gegeben durch

$$T(x,y,z) = x^2 y + y^2 z + 4x + 14y + z \ .$$

b) [**4 P**] Wir befinden uns im Punkt P. In welche Richtung müssen wir uns auf der Fläche S bewegen, damit die Temperatur am schnellsten steigt?

Siehe nächstes Blatt!

7. [**7 P**] Sei $f(x,y) = (x^2+y^2-1)^2$. Bestimmen Sie die globalen Extrema von f auf dem Gebiet G (siehe Abbildung).



8. [**6 P**] Berechnen Sie das Integral $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, wobei $F(x,y,z) = (2x, -y, -1)$ ist und

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1, z \geq 0 \right\}$$

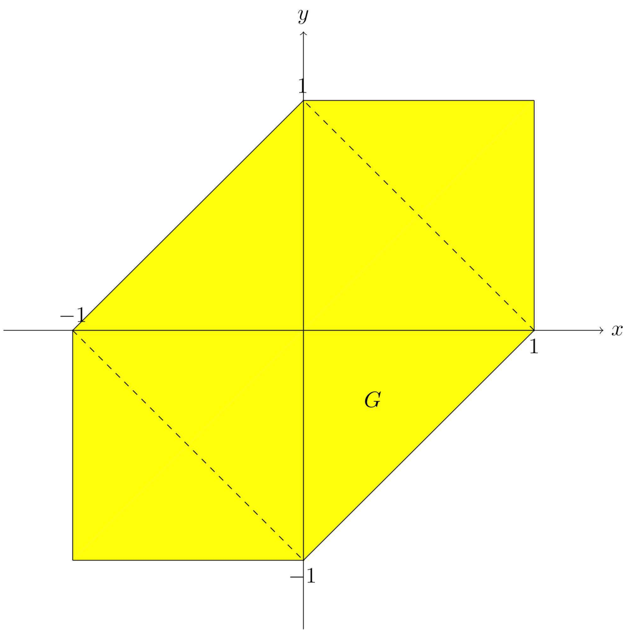
die Oberfläche eines Halbellipsoids bezeichnet. Die Normale ist nach aussen gerichtet.

Bitte wenden!

9. [**6 P**] Eine elektrische Ladung ist gemäss Ladungsdichte

$$\sigma(x, y) = xy(x^2 + y^2)$$

über das Gebiet G (siehe Abbildung) verteilt. Die Einheit von σ ist Coulomb pro Quadratmeter: $\frac{C}{m^2}$. Berechnen Sie die Gesamtladung des Gebiets G.



10. [**7 P**] Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} (x-\pi)^2 & \text{für } x \in [0, 2\pi) \, , \\ f(x + 2\pi) & \text{für alle } x \, . \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Fourierreihe von f auf das Intervall $[-2\pi, 2\pi]$. Hinweis: Skizzieren Sie zuerst den Funktionsgraph von f.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Fourierreihe (setzen Sie $x = 0$), dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \, .$$