

BASISPRÜFUNG

Allgemeine Hinweise:

- Lies zuerst alle Aufgaben sorgfältig durch. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden. Daher verweile nicht zu lange bei einer, die Schwierigkeiten bereitet.
- Für jede Aufgabe wird die maximal erreichbare Punktzahl in Klammer angegeben.
- Notiere alle Zwischenresultate und Rechenschritte.
- Gib Begründungen und nenne die verwendeten Sätze.
- Bitte schreibe auf *alle* Blätter Deinen Namen, fülle den Kopf des Deckblattes aus und notiere dort Deine Leginummer.
- Vergiss nicht, am Schluss *alle* Blätter abzugeben.

Erlaubte Hilfsmittel:

- 15 A4-Seiten (7.5 A4-Blätter) selbstverfasst von Hand oder getippt;
- *keine* sonstige Literatur;
- *kein* Taschenrechner;
- *kein* Mobiltelefon.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe

[7 Punkte]

(a) Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) + \log(1-x)}{\tan(x^2)}.$$

(b) Bestimme die Konstante α so, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \alpha + \cosh x & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} \cdot e^{-1/x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

stetig ist.

2. Aufgabe

[8 Punkte]

(a) Stelle $\cos 5\phi$ als Polynom in $\cos \phi$ dar.

(b) Beschreibe und skizziere die Menge

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 2 \right\}.$$

3. Aufgabe

[7 Punkte]

Entwickle die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{1-x+x^2-x^3}$$

in eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und bestimme deren Konvergenzradius.

Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Siehe nächstes Blatt!

4. Aufgabe

[8 Punkte]

Bestimme alle Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$y^{(5)} - y^{(2)} = 0,$$

die für $t \rightarrow \infty$ beschränkt sind.**5. Aufgabe**

[7 Punkte]

Bestimme die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{2}{1+t^2} \cdot y = 8$$

für $t > 0$ mit der Nebenbedingung $y(1) = 4$.**6. Aufgabe**

[7 Punkte]

Bestimme das Volumen der Teilmenge der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$, die oberhalb des Paraboloids $z = x^2 + y^2$ liegt.**7. Aufgabe**

[8 Punkte]

Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + 4xy - \frac{1}{2}y^2 - x + y$$

auf dem Bereich

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 0, |x - y| \leq 1 \} .$$