D-ITET/INFK | Analysis I und II | Winter 2009
Proff. M. Akveld, R. Pink

Basisprüfung

Allgemeine Hinweise:

- Lies zuerst alle Aufgaben sorgfältig durch. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden. Daher verweile nicht zu lange bei einer, die Schwierigkeiten bereitet.
- Für jede Aufgabe wird die maximal erreichbare Punktzahl in Klammer angegeben.
- Notiere alle Zwischenresultate und Rechenschritte, und gib Begründungen.
- Bitte schreibe auf *alle* Blätter Deinen Namen, fülle den Kopf des Deckblattes aus und notiere dort Deine Leginummer.
- Vergiss nicht, am Schluss *alle* Blätter abzugeben.

Erlaubte Hilfsmittel:

- 20 A4–Seiten (10 A4–Blätter) selbstverfasst von Hand oder getippt;
- *keine* sonstige Literatur;
- *kein* Taschenrechner;
- *kein* Mobiltelefon.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe [X Punkte, Winter 2009]

(a) Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(\sqrt{x})}{e^x - 1}\,.$$

(b) Bestimme die Konstanten α und β so, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) + e^x & \text{für } x < 0 \\ \alpha(1+x)^{2009} + \beta e^{-x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

stetig differenzierbar ist.

2. Aufgabe [X Punkte, Winter 2009]

(a) Bestimme alle Werte $z = x + iy \in \mathbb{C}$, so dass gilt

$$z^3 = 8\,i\,.$$

(b) Beschreibe und skizziere die Menge

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) < 1 \right\}.$$

3. Aufgabe [X Punkte, Winter 2009]
Die Koeffizienten einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ erfüllen die Bedingungen $a_0 = 2$ und

$$a_n = \frac{2(n+1)}{n} \cdot a_{n-1}$$

für alle $n \geq 1$. Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe und zeige, dass sie im Inneren ihres Konvergenzkreises die Funktion

$$f(z) = \frac{2}{(1-2z)^2}$$

darstellt.

Siehe nächstes Blatt!

4. Aufgabe [X Punkte, Winter 2009]

Berechne die allgemeine Lösung $y = y(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$y''' - 3y'' + 4y = 24\, e^{3t} \, .$$

5. Aufgabe [X Punkte, Winter 2009]

Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dt} - \tan t \cdot y = e^{\sin t} \, .$$

6. Aufgabe [X Punkte, Winter 2009]

Berechne das Integral der Funktion $f(x, y) = 1 + xy$ über den Bereich

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \, , \; y \geq 0 \right\} \, .$$

7. Aufgabe [X Punkte, Winter 2009]

Finde die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$$

auf der Menge

$$\gamma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \, , \; 2x^2 + y^2 = 1 \right\} \, .$$

8. Aufgabe [X Punkte, Winter 2009]

Die Funktion $t \mapsto F(t)$ sei gegeben durch

$$F(t) = \int_1^{2+2t} \frac{\cos(tx)}{x(x+t)}\,dx\,.$$

Bestimme $F'(0)$.

9. Aufgabe [X Punkte, Winter 2009]

Berechne den Fluss des Vektorfelds $K\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ von innen nach aussen durch die Oberfläche des Körpers

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y^2 + z^2 \leq 1 + x^2 \leq 2 \right\}.$$