ETH Zürich, Basisprüfung
Analysis I/II D-BAUG Winter 2012
Dr. Cornelia Busch / Dr. Meike Akveld

Wichtige Hinweise

- Prüfungsdauer
  - Basisprüfung Analysis I/II: Aufgaben 1–10, 240 Minuten
  - Semesterkurs Analysis I: Aufgaben 1–5, 120 Minuten
  - Semesterkurs Analysis II: Aufgaben 6–10, 120 Minuten
- Zugelassene Hilfsmittel: Bis zu 30 A4-Seiten (15 A4-Blätter) selbst verfasste Zusammenfassung (für die Semesterkurse Analysis I bzw. II: 20 A4-Seiten). Kein Taschenrechner!
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden! Der Lösungsweg ist stets klar und verständlich darzustellen! Korrekte, aber unbegründete Antworten werden nicht bepunktet! Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Satz Sie sich beziehen!
- Alle Aufgaben haben das gleiche Gewicht.

$* * *$ Viel Erfolg! $* * *$

---

1. **a)** Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in der Form $x + \mathbf{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) $\dfrac{2+3\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$ (ii) $(\sqrt{3}+\mathbf{i})^7$

b) Betrachtet werde die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{i}\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) := \frac{z-2}{z-\mathbf{i}}.$$

Bestimmen Sie die Menge aller Punkte z in der Gauss'schen Zahlenebene mit $|f(z)| = 2$. Skizzieren Sie diese Menge.

Bitte wenden!

2. **a)** Eine Funktion $f : (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n.$$

Ermitteln Sie den Konvergenzradius ρ dieser Potenzreihe.

b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f derart, dass $F(0) = 0$. Stellen Sie F zunächst als Potenzreihe und anschliessend als elementare Funktion dar.

c) Verwenden Sie F um eine Darstellung von f als elementare Funktion zu erhalten.

3. In der Ebene $\mathbb{R}^2$ seien der Punkt $P = (0, -1)$ sowie die Gerade g mit der Geradengleichung $y = 1$ gegeben. Für einen beliebigen Punkt $Q = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ bezeichne $d_P(Q)$ den Abstand von Q zum Punkt P und $d_g(Q)$ den Abstand von Q zur Geraden g.

a) Bestimmen Sie die Menge aller Punkte $Q \in \mathbb{R}^2$ mit $d_P(Q) = d_g(Q)$.

b) Die Menge aus Teilaufgabe **(a)** stellt eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ dar. Bestimmen Sie die Krümmung dieser Kurve in einem vorgegebenen Punkt $Q = (x, y)$.

c) Skizzieren Sie die Kurve im Intervall $x \in [-2, 2]$ zusammen mit ihrem Krümmungskreis bei $x = 0$.

4. Lösen Sie die nachfolgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int 3^x \cos x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_b^a \mathrm{e}^x \sqrt{a - b\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$, $b < 0$, $a > 0$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 6}{x^3 - 7x^2 + 18x - 12}\,\mathrm{d}x$

5. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) + 2y'(x) = 3x\mathrm{e}^x, \qquad y(0) = \frac{4}{3}, \quad y'(0) = 0.$$

6. Bestimmen Sie die Ebene

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

welche durch den Punkt $(2, 1, 2)$ geht und das kleinste Volumen vom ersten Oktanten abschneidet.

Siehe nächstes Blatt!

7. Der Punkt $P = \big(0, y(0)\big)$ liege auf der Kurve C, welche durch die Gleichung

$$(x + xy + y)\cos(xy) = 2$$

beschrieben wird. Berechnen Sie $y(0)$ sowie die Steigung der Kurve im Punkt P.

8. Wir betrachten den Körper, der vom Zylinder $x^2 + y^2 = 4$, der x-y-Ebene und der Ebene mit der Gleichung $z = 2 + x$ begrenzt wird. Die Temperatur (in Grad Celsius) im Punkt (x, y, z) im Inneren des Körpers betrage $T(x, y, z) = 2x$. Berechnen Sie die durchschnittliche Temperatur des Körpers.

Hinweis: Die durchschnittliche Temperatur eines Körpers K in $\mathbb{R}^3$ mit der Temperaturverteilung $T(x, y, z)$ ist gegeben durch

$$\overline{T} = \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \iiint_K T(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

9. Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfeldes $\vec{F} = (3xz - y, xz + yz, x^2 + y^2)$ entlang des Randes des Kartoffelchips aus Abbildung 1. Der Kartoffelchip ist derjenige Teil der Fläche $z = xy$, welcher im Inneren des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$ liegt. Die Orientierung soll der in Abbildung 1 eingezeichneten entsprechen.

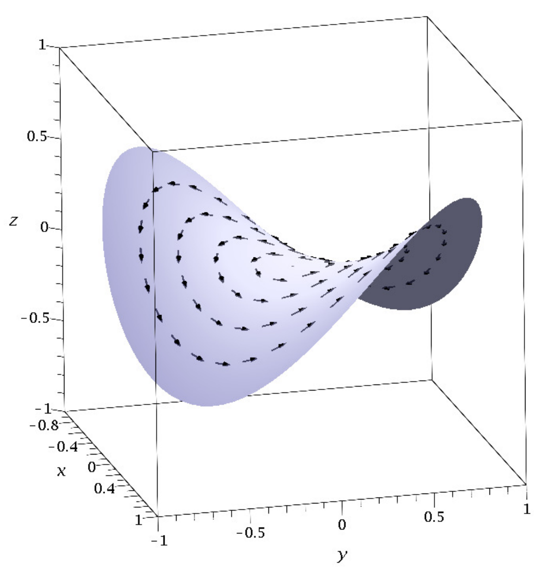

Abbildung 1: Aufgabe 9: Der Kartoffelchip.

Bitte wenden!

10. Ermitteln Sie eine Lösung $u(x,t)$ des folgenden Anfangsrandwertproblems mit Hilfe eines Separationsansatzes.

$$\begin{cases} \pi^2 u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) & \text{für } 0 < x < 3 \text{ und } 0 < t \\ u(0,t) = 0 & \\ u(3,t) = 0 & \\ u(x,0) = \sin(2\pi x) & \end{cases}$$