ETH Zürich, Basisprüfung
Analysis I/II D-BAUG Winter 2013
Dr. Meike Akveld

Wichtige Hinweise

- Prüfungsdauer
  - Basisprüfung Analysis I/II: Aufgaben 1–10, 240 Minuten
  - Semesterkurs Analysis I: Aufgaben 1–5, 120 Minuten
  - Semesterkurs Analysis II: Aufgaben 6–10, 120 Minuten
- Zugelassene Hilfsmittel: Bis zu 30 A4-Seiten (15 A4-Blätter) selbst verfasste Zusammenfassung (für die Semesterkurse Analysis I bzw. II: 20 A4-Seiten). Kein Taschenrechner!
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden! Der Lösungsweg ist stets klar und verständlich darzustellen! Für korrekte, aber unbegründete Antworten werden keine Punkte vergeben! Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Satz Sie sich beziehen!
- Alle Aufgaben haben das gleiche Gewicht.

$* * *$ Viel Erfolg! $* * *$

---

1. **a)** Bestimmen Sie den Betrag, das Argument und den Real- und Imaginärteil der Zahl

$$w = \frac{(1-\sqrt{3}i)^4}{1-i} \cdot (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \ .$$

b) Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene den Bereich, der die komplexen Zahlen z enthält, für die gilt

$$\left|\frac{z}{1-i}\right| = \sqrt{8} \text{ und } 0 \leq \arg\frac{z}{i} \leq \frac{3}{4}\pi \ .$$

2. **a)** Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sqrt{1+x}} - \frac{1}{x}\right) \ .$$

Bitte wenden!

b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom vierten Grades der Funktion $f(x) = \cos(x)^2$ um $x_0 = 0$.

3. Betrachten Sie die zwei Kreise K_1 und K_2 mit Radien r_1 respektive r_2, die beide durch den Ursprung verlaufen und deren Mittelpunkte beide auf der positiven y-Achse liegen. Eine Gerade g durch den Ursprung habe positive Steigung und schneide die beiden Kreise in den Punkten I_1 und I_2. Betrachten Sie diese beiden Schnittpunkte als zwei diagonale Ecken eines Rechtecks, dessen Seiten parallel zu den Achsen verlaufen. Bestimmen Sie die Steigung der Geraden g so, dass die Rechtecksfläche so gross wie möglich ist, und geben Sie diese maximalen Rechtecksfläche an.

4. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^2 \sin 3x \, dx$.

b) $\displaystyle\int \frac{4\ln(\frac{1}{\tan x})}{\sin x \cos x} \, dx$.

c) $\displaystyle\int \frac{4x^3 + 4x^2 + 6x - 1}{2x^2 - 2x + 1} \, dx$.

5. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'''(x) + 2y'(x) = x + e^x \ .$$

6. Gegeben ist die Fläche S :

$$S : (y + z)^2 + (z - x)^2 = 16 \ ,$$

a) Bestimmen Sie die Punkte auf der Oberfläche, deren Normalenvektor parallel zur $yz-$Ebene zeigt.

b) Bestimmen Sie für diejenigen Punkte, die Sie in a) gefunden haben, die Gleichung der Tangentialebene.

7. Sei $f(x, y) = x^3 - x^2 - y^3 - y^2 + 1$. Bestimmen Sie die globalen Extrema von f auf dem Gebiet B (siehe Abbildung 1). Beachten Sie, dass der Rand von B auch zu B gehört.

Siehe nächstes Blatt!

Abbildung 1: Aufgabe 7.

8. Betrachten Sie den endliche Körper K, der im ersten Oktanten durch den Zylinder $y^2 + z^2 = 9$ und die Ebene $x = y$ begrenzt wird.

a) Erstellen Sie eine Skizze dieser Situation.

b) Berechnen Sie das Volumen von K.

9. Die Fläche S bestehe aus den zwei Teiloberflächen

$$S_1 = \left\{(x, y, z)|y \geq 0, z \leq 1, z = x^2 + y^2\right\}$$

und

$$S_2 = \left\{(x, y, z)|y = 0, 1 \geq z \geq x^2\right\} \ .$$

(siehe Abbildung 2).
Berechnen Sie das Integral $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, wobei $F(x, y, z) = (xz - xy, xy - yz, yz - xz)$ ist und der Normalenvektor nach aussen zeigt.

Abbildung 2: Aufgabe 9

10. Bestimmen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes eine Lösung $u(x, t)$ des folgenden Randwertprobems:

$$\begin{cases} u_{xx} & = u_t - u \quad \text{für } 0 < x < \pi \text{ und } 0 < t \\ u(0, t) & = 0 \\ u(\pi, t) & = 0 \\ u(x, 0) & = \cos(2x)\sin(x). \end{cases}$$

Hinweis:

$$\begin{aligned} \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right) \\ \cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\right) \\ \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\left(-\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right) \end{aligned}$$