

Serie 1

1. a) Gegeben seien die Folgen

$$a_n = \sum_{k=1}^n k(k+1), \quad b_n = \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2).$$

Beweisen sie durch Induktion, dass gilt

$$a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \quad b_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

- b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $x > -1$, für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

- c) Wo liegt der Fehler im folgenden Induktionsbeweis? Begründen Sie Ihre Antwort!

Behauptung *Alle Pferde haben dieselbe Farbe.*

Beweis Sei $P(n)$ die Aussageform, dass in jeder Ansammlung von n Pferden alle Pferde dieselbe Farbe haben. $P(1)$ ist offensichtlich wahr.

Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass $P(k)$ wahr sei, und wollen $P(k+1)$ beweisen: Nehmen wir eine beliebige Gruppe von $k+1$ Pferden. Schicken wir eines weg, so bleiben k Pferde über, die also alle die gleiche Farbe haben. Holen wir das Pferd zurück und schicken ein anderes weg, so bleiben wieder k Pferde über, die dann auch alle die gleiche Farbe haben. Pferde ändern ihre Farbe nicht, also muss dies dieselbe Farbe wie die der ersten Gruppe sein. Somit haben alle $k+1$ Pferde die gleiche Farbe.

Damit gilt $P(k)$ für alle $k \geq 1$. □

2. a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x+3| \geq 3$?

- b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x-2| \geq |x|-2$?

- c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{x^2 - 2x + 2}{x + 2} \geq 2 - x$?

d) Zeichne die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |x| + |y| \leq 2\}$.

3. Zwei an sich unabhängige reelle Größen x und y sind miteinander verknüpft durch die Einschränkung

$$x^2 - 2x - 4 \leq 4y - y^2. \quad (1)$$

- a) Man verschaffe sich eine Übersicht über die Gesamtheit der möglichen „Zustände“ (x, y) . Gemeint ist: Man zeichne eine Figur.
- b) Welches ist der maximale Wert, den die Grösse x unter der Bedingung (1) höchstens annehmen kann, und wie muss y gewählt werden, damit dieser Maximalwert von x tatsächlich realisiert werden kann?

Abgabe: Freitag 27. September 2013 in die Fächlein der Übungsleiter im HG F 28 .

4. Online-Abgabe

Abgabe der Multiple-Choice Aufgaben: Sonntag 29. September 2013, 17:00 Uhr.

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- (a) Je zwei negative reelle Zahlen, die Quadrate von reellen Zahlen sind, sind gleich.
- (b) Jedes Element der leeren Menge ist grün.
- (c) Es gibt keine gerade Primzahl.
- (d) Jede negative Primzahl ist gerade.

Siehe nächstes Blatt!

2. Welche der folgenden Summen ist nicht gleich $\sum_{n=1}^{21} \frac{(n+1)^2-2}{\log(n+1)}$?

(a)

$$\sum_{n=1}^{12} \frac{(n+1)^2-2}{\log(n+1)} + \sum_{n=13}^{21} \frac{(n+1)^2-2}{\log(n+1)}$$

(b)

$$\sum_{n \in I} \frac{(n+1)^2-2}{\log(n+1)} \quad \text{wobei } I := \{1, 2, \dots, 21\}.$$

(c)

$$\sum_{n \in I_1 \cup I_2} \frac{(n+1)^2-2}{\log(n+1)} \quad \text{wobei } I_1 := \{1, 2, \dots, 7\} \text{ und } I_2 := \{5, 6, \dots, 21\}.$$

(d)

$$\sum_{n \in I_1 \cup I_2} \frac{(n+1)^2-2}{\log(n+1)} - \sum_{n \in I_1 \cap I_2} \frac{(n+1)^2-2}{\log(n+1)}$$

wobei I_1 und I_2 wie oben definiert sind.

(e)

$$\sum_{n=3}^{23} \frac{(n-1)^2-2}{\log(n-1)}$$

3. Die Ungleichung $||x-1|-1| < 2$ für reelle Zahlen x ist äquivalent zu ...

(a) $x < 4$

(b) $|x| < 4$

(c) $0 < x < 2$

(d) $-2 < x < 4$

(e) $-3 < x < 3$

Bitte wenden!

Organisatorische Informationen zum Übungsbetrieb

- **Übungsserien.** Die Übungsserien werden jeweils freitags auf der Vorlesungswebseite veröffentlicht. Die in der Woche n ausgeteilte Serie wird am Montag der Woche $n + 1$ in den Übungen vorbesprochen und ist in der Woche $n + 1$ am Freitag bis 13 Uhr abzugeben. Die Serien können in den Postfächern der Übungsleiter, im HG F 28, abgegeben werden.
- **Wöchentliche Multiple-Choice-Aufgaben.** Zusätzlich zu den Übungsaufgaben wird es jede Woche Multiple-Choice-Aufgaben geben. Die Aufgaben werden freitags oder samstags im Woche n veröffentlicht und können bis Sonntag Abend in Woche $n + 1$ online bearbeitet werden.
- **Übungen.** Die wöchentlichen Übungen dienen zum Einüben der Begriffe und Methoden die in der Vorlesung behandelt werden und zur Besprechung der Übungsserien. Eine aktive Teilnahme an den Übungsstunden wird erwartet. Die Einteilung in die Übungsgruppen wird elektronisch von den Studierenden getätigt. Auch dazu erhalten Sie in der ersten Vorlesungswoche ein Email mit Link zur Einschreibung in die Übungsgruppe.
- **Schnellübungen.** Alternierend mit der Freitags-Vorlesung werden 14-tägig freitags von 8 bis 10 Uhr Schnellübungen angeboten. Dort erhalten Sie Aufgaben, mit denen Sie sich während der Schnellübung beschäftigen und zu denen sie den anwesenden Assistenten Fragen stellen können.
- **Präsenz.** Während des Semesters am Mittwoch zwischen 12 und 13 Uhr in HG G 19.1 angeboten. In jeder Woche werden die Assistenten für die bei Ihnen eingeschriebenen Studenten (an einem dieser Termine) Präsenz halten. Genauer erfahren Sie in der ersten Übungsstunde.

Bei Fragen zum Übungsbetrieb wenden Sie sich bitte an Felix Hensel (felix.hensel@math.ethz.ch), bei Fragen zu einzelnen Aufgaben jedoch an Ihren Hilfsassistenten bzw. suchen Sie die Präsenz auf.

Informationen zur Vorlesung und zu den Übungen, sowie die Übungsserien und deren Musterlösungen finden Sie unter

http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2013/other/analysis1_itet/