Musterlösung Schnellserie 1

1. Bemerke, dass $(iii) \vee (iv)$ immer wahr ist. Da genau eine der Aussagen wahr ist, muss also $\neg(i) \wedge \neg(ii)$ gelten. Das heisst, Fritz hat weder mehr, noch weniger als tausend Bücher. Also hat Fritz genau tausend Bücher.

2. Für die Umrechnung von Polarkoordinaten in Kartesische Koordinaten gelten folgende Formeln:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

Die Rücktransformation von Kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten lautet:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varphi = \arg(x,y) = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{für } x>0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x=0, y>0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{für } x=0, y<0 \\ \arctan\frac{y}{x}+\pi & \text{für } x<0 \end{cases}$$

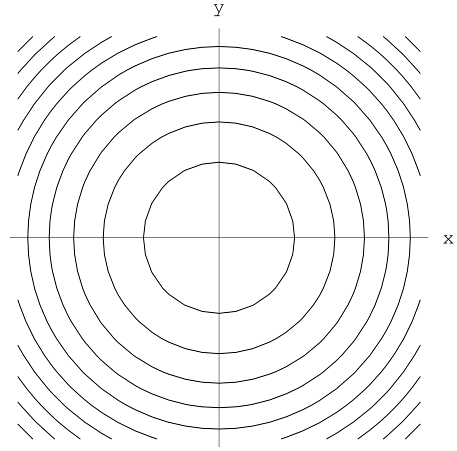
a) $f(r,\varphi) = r^2 = x^2+y^2$

b) $g(r,\varphi) = \tan\varphi = \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \frac{y}{x}$.

c) $h(r,\varphi) = r^2\sin(2\varphi) = r^2\cdot 2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi = 2xy$

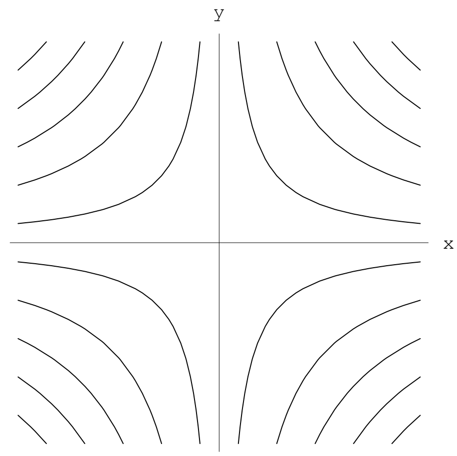
d) $j(r,\varphi) = r^2\cdot(1+\sin(2\varphi)) = f(r,\varphi)+h(r,\varphi)$
$\overset{1.a,c}{=} x^2+y^2+2xy = (x+y)^2$

3. **a)** Die Gleichung $x^2+y^2=c$ definiert für $c>0$ einen Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $\sqrt{c}$, für $c=0$ den Nullpunkt alleine, und für $c<0$ die leere Menge:



Bitte wenden!

b) Die Gleichung $xy = c$ definiert für $c \neq 0$ eine Hyperbel mit der x- und y-Achse als Asymptoten, und für $c = 0$ die Vereinigung dieser beiden Achsen selbst.



c) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2} &= c \\ \Leftrightarrow \qquad x^2-2x+1+y^2 &= c(x^2+2x+1+y^2) \\ \Leftrightarrow \qquad (c-1)(x^2+1+y^2)+2(c+1)x &= 0. \end{aligned}$$

Für $c = 1$ ist dies äquivalent zu $x = 0$, die Lösungsmenge ist dann die y-Achse. Für $c \neq 1$ setzen wir $d := \frac{c+1}{c-1}$; alle Werte $d \neq 1$ sind dabei möglich. Die Gleichung ist dann äquivalent zu

$$\begin{aligned} x^2+2dx+y^2+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad (x+d)^2+y^2 &= d^2-1. \end{aligned}$$

Für $|d| > 1$ definiert dies einen Kreis um den Mittelpunkt $(-d, 0)$ mit dem Radius $\sqrt{d^2-1}$. Für $d = -1$ besteht die Lösungsmenge nur aus dem Punkt $(1, 0)$. Der Wert $d = 1$ ist bereits ausgeschlossen, und für $|d| < 1$ ist die Lösungsmenge leer.

4. a) $\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!k+n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$

b) Verankerung (n=0): Es ist $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!0!} = 1$.

Induktionsannahme: Für alle $0 \leq k \leq n$ gilt: $\binom{n}{k} \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$.

Induktionsschritt:
Zu zeigen ist, dass für alle $0 \leq k \leq n+1$ gilt: $\binom{n+1}{k} \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$.
Falls $1 \leq k \leq n$, so können wir die Formel aus a) zusammen mit der Induktionsvoraussetzung anwenden:

$$\binom{n+1}{k} = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\in \mathbb{Z}^{\geq 0}} + \underbrace{\binom{n}{k-1}}_{\in \mathbb{Z}^{\geq 0}} \in \mathbb{Z}^{\geq 0}.$$

Für $k = 0$ und $k = n+1$ können wir diese Formel nicht anwenden, dafür können wir diese Binomialkoeffizienten direkt ausrechnen, denn

$$\binom{n+1}{n+1} = \binom{n+1}{0} = 1.$$

Siehe nächstes Blatt!

Dies zeigt die Behauptung.

c) Verankerung: $(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0$

Induktionsnahme: der Binomische Lehrsatz sei bewiesen für n.

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}
\end{aligned}$$

Wir schreiben die zweite Summe um, in dem wir statt über k von 0 bis n über $l = k+1$ von 1 bis $n+1$ summieren:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} = \sum_{l=1}^{n+1}\binom{n}{l-1}a^{n-(l-1)}b^l.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \binom{n}{0}a^{n+1} + \sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l}a^{n+1-l}b^l + \sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l-1}a^{n+1-l}b^l + \binom{n}{n}b^{n+1} \\
&= \sum_{l=1}^{n}\left(\binom{n}{l}+\binom{n}{l-1}\right)a^{n+1-l}b^l + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{l=1}^{n}\binom{n+1}{l}a^{n+1-l}b^l + \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1} \\
&= \sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l}a^{n+1-l}b^l
\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ ist. Dies zeigt die Behauptung.

d) Mit **c)** erhalten wir

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$