D-ITET | Analysis 1 | HS 13
Prof. Richard Pink

Musterlösung Schnellserie 2

1. **a)** Richtig. Angenommen es gilt $g(f(x_0)) = g(f(x_1))$. Da g injektiv ist, folgt, dass $f(x_0) = f(x_1)$ ist. Weil f injektiv ist, folgt, dass $x_0 = x_1$ gilt.

b) Richtig. Seien f, g bijektiv, also injektiv und surjektiv. Dann ist wegen Teil a) $g \circ f$ injektiv und mit einer ähnlichen Argumentation wie in a) überlegt man sich, dass $g \circ f$ auch surjektiv ist. Analog kann man sich die anderen Fälle überlegen.

c) Falsch. Die Menge X könnte z.B. eine Menge mit nur einem Element sein, und damit ist $g \circ f$ automatisch injektiv, egal was g für eine Funktion ist.

d) Richtig. Angenommen f ist nicht injektiv. Dann gibt es $x_0, x_1 \in X$ mit $x_0 \neq x_1$ und $f(x_0) = f(x_1)$. Daraus folgt aber, dass $g(f(x_0)) = g(f(x_1))$ gilt. Das heisst $g \circ f$ ist ebenfalls nicht injektiv.

e) Falsch. Wenn z.B. f eine konstante Funktion ist und Z mehr als ein Element hat, kann $g \circ f$ nicht surjektiv sein, auch wenn g surjektiv ist.

2. Die Funktionen $x \mapsto x^2 \pm \alpha x \mp \beta$ und $x \mapsto (\alpha + \beta)x$ sind stetig. Darum ist die Funktion f stetig ausserhalb der Punkte ± 1, und sie ist linksseitig stetig im Punkt -1 und rechtsseitig stetig im Punkt $+1$. Damit sie an diesen Stellen stetig ist, muss noch gelten:

$$1 + \alpha + \beta \;=\; f(-1) \;\overset{!}{=}\; \lim_{x \to -1+} f(x) \;=\; \lim_{x \to -1+} (\alpha + \beta)x \;=\; -(\alpha + \beta),$$

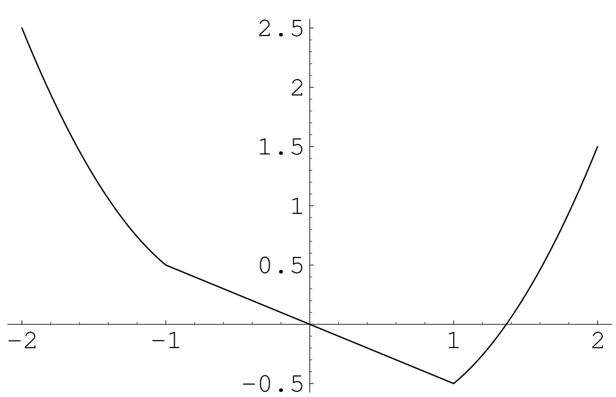
und

$$1 + \alpha - \beta \;=\; f(1) \;\overset{!}{=}\; \lim_{x \to 1-} f(x) \;=\; \lim_{x \to 1-} (\alpha + \beta)x \;=\; \alpha + \beta.$$

Die zweite Gleichung ist äquivalent zu $\beta = \frac{1}{2}$, und nach Einsetzen dieses Werts ist die erste Gleichung äquivalent zu $\alpha = -1$. Die Antwort lautet also

$$\boxed{\alpha = -1 \text{ und } \beta = \tfrac{1}{2}}$$

Der Graph von f ist dann:



Bitte wenden!

3. **a)** Wir wissen, dass die Funktion $[0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ stetig ist. Daher ist f stetig auf $[0,1[$. Ähnlich sieht man, dass f auf $]1,4]$ stetig ist. Es bleibt also zu zeigen, dass f auch an der Stelle $x=1$ stetig ist. Für $x=1$ gilt $x^2 = 1^2 = 1 = (1-2)^2 = (x-2)^2$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Wir wissen, dass ein $\delta' > 0$ und ein $\delta'' > 0$ existiert, so dass folgendes gilt.

- Für alle $y \in [-1,4]$ mit $y < 1$ und $|1-y| < \delta'$ gilt $|1^2 - y^2| < \varepsilon$.
- Für alle $y \in [-1,4]$ mit $y > 1$ und $|1-y| < \delta''$ gilt $|(1-2)^2 - (y-2)^2| < \varepsilon$.

Mit $\delta := \min\{\delta', \delta''\}$ erhalten wir also, dass gilt:

$$\forall y \in [-1,4] : |1-y| < \delta \implies |f(1) - f(y)| < \varepsilon.$$

Also ist f auch an der Stelle $x=1$ stetig und somit ist f überall stetig.

b) Für alle $a \geq 0$ ist $\left(a, \frac{a}{2}\right) \in D$. Falls $a > 0$ ist, gilt $f\left(a, \frac{a}{2}\right) = \frac{2}{3}$. Für $a = 0$ ist aber $f\left(a, \frac{a}{2}\right) = 1$. Für jedes $\delta > 0$ gibt es ein $a > 0$ so dass $|(a, \frac{a}{2}) - (0,0)| < \delta$ gilt. Wählt man $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$, so gibt es also für jedes $\delta > 0$ ein $a > 0$, so dass gleichzeitig $|(a, \frac{a}{2}) - (0,0)| < \delta$ und $|f(a, \frac{a}{2}) - f(0,0)| = |\frac{2}{3} - 1| = \frac{1}{2} \geq \varepsilon$ gilt.

4. Zu zeigen: Die Funktion $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ist bijektiv.

Wir wissen: Ein mit stetigen Funktionen gebildeter rationaler Ausdruck ist, soweit definiert, wieder stetig. Darum ist die Funktion $f(x)$ auf $]-1,1[$ stetig. Als nächstes beachte, dass gilt:

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = -\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to 1-} f(x) = +\infty,$$

denn in beiden Grenzwerten geht der Nenner $\sqrt{1-x^2}$ von oben gegen Null und der Zähler gegen -1, bzw. gegen 1. Insbesondere nimmt f für jede gegebene Zahl c sowohl Werte $> c$ als auch Werte $< c$ an. Aus der Stetigkeit und dem Zwischenwertsatz folgt daraus, dass f auch den Wert c selbst annimmt. Somit nimmt f jedes $c \in \mathbb{R}$ als Wert an, das heisst, f ist surjektiv.

Andererseits gilt

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}}$$

für $0 < x < 1$. In diesem Bereich ist die Funktion
$x \mapsto x^2$ streng monoton wachsend
$\Rightarrow$ für $0 < x < 1$ ist $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ streng monoton fallend
$\Rightarrow$ für $0 < x < 1$ ist $x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$ streng monoton fallend
$\Rightarrow$ für $0 < x < 1$ ist $x \mapsto f(x)$ streng monoton wachsend.
Ausserdem gilt in diesem Bereich $f(x) > 0 = f(0)$. Somit ist f streng monoton wachsend für $0 \leq x < 1$. Wegen $f(-x) = -f(x)$ folgt, dass f auch auf dem Bereich $-1 < x \leq 0$ streng monoton wachsend ist. Also ist f insgesamt streng monoton wachsend und daher injektiv.

Somit ist f sowohl injektiv als auch surjektiv, also bijektiv.