Musterlösung Schnellserie 3

1. Es seien $r > 0$ und $R > r$ beliebig gewählt und es sei $B_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x, y)| < r\}$ die offene Kreisscheibe um $(0, 0)$ mit Radius r. Der Abschluss von B_r ist $\overline{B_r} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x, y)| \leq r\}$. Für $X := B_r \cup \{(R, R)\}$ gilt $X \neq X^\circ = B_r$ und $X \neq \overline{X} = \overline{B_r} \cup \{(R, R)\}$. Ausserdem ist $\overline{X} = \overline{B_r} \cup \{(R, R)\} \neq \overline{B_r} = \overline{X^\circ}$. Daher ist $B_r \cup \{(R, R)\}$ sowohl ein Beispiel für a) als auch für b).

Beispiele für c) sind die leere Menge $\emptyset$ oder ganz $\mathbb{R}^2$.

2. Beispiele von Funktionen welche die Eigenschaften erfüllen sind:

a) $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \frac{x^2}{(x-1)^2}$.

b) $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sin(x) + \sin(\frac{1}{x-1})$. Da $\sin(\pi n) = 0$ und $\sin(\pi(n + \frac{1}{2})) = \pm 1$ ist, existieren die Grenzwerte nicht, auch nicht im uneigentlichen Sinn.

3. Das n-te Folgenglied ist gegeben durch $a_n = 2^{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}}$ und für die geometrische Summe gilt $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}$. Damit erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}} = 2^{\frac{1}{1-1/2}} = 2^2 = 4.$$

4. Sei K_n die Whisky-Konzentration nach n Schritten. Dann ist

$K_0 = 1,\ K_{n+1} = K_n - \lambda K_n = (1-\lambda)K_n,$ und induktiv erhält man $K_n = (1-\lambda)^n K_0 = (1-\lambda)^n$.

Ist die Whisky-Konzentration nach n_0 Schritten auf die Hälfte gesunken, so lautet die Stop-Bedingung $K_{n_0} = \frac{1}{2}$. Damit erhalten wir die Anzahl Schritte n_0 in Abhängigkeit von λ:

$$(1 - \lambda)^{n_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow n_0 = -\frac{\ln(2)}{\ln(1 - \lambda)}.$$

Die nach n Schritten eingenommene Flüssigkeitsmenge ist gegeben durch $n\lambda$. Für $n = n_0$ erhalten wir

$$n_0\lambda = -\frac{\ln(2)\lambda}{\ln(1 - \lambda)} = \ln(2)\Big(\frac{\ln(1 - \lambda)}{-\lambda}\Big)^{-1} \to \ln(2), \quad (\lambda \to 0),$$

wobei wir $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ mit $x = -\lambda$ verwendet haben.

Fritz hat somit insgesamt $\ln(2)$ Liter von dem Whisky-Wasser-Gemisch getrunken. Wegen $K_{n_0} = \frac{1}{2}$ war ein halber Liter davon Whisky. Die getrunkene Wassermenge beträgt somit $\ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0.19$ Liter.