Musterlösung Schnellserie 4

1. a) Wir setzen $a_n := \frac{1}{(2n+5)^3}$ und berechnen

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(n+1)+5}{2n+5}\right|^3 \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{2n+7}{2n+5}\right|^3 \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2+\frac{7}{n}}{2+\frac{5}{n}}\right|^3 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Der Limes existiert insbesondere und liefert damit, nach dem Quotientenkriterium, den gesuchten Konvergenzradius. Es gilt also $\varrho = 1$.

b) Wir setzen $a_n := (\log n)^n$. Für alle $n \geq 2$ gilt $0 < \log n < \log(n+1)$ und daher

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(\log n)^n}{(\log(n+1))^{n+1}} \leq \frac{(\log(n+1))^n}{(\log(n+1))^{n+1}} = \frac{1}{\log(n+1)}.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n} = 0$ und dem Vergleichskriterium folgt daher $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 0$. Somit ist der Konvergenzradius $\varrho = 0$.

Alternativ kann man das Wurzelkriterium verwenden. Wegen

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \log n = \infty$$

folgt

$$\varrho = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = 0.$$

c) Wir setzen $a_n := \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ und berechnen

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n}} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert also und ist, nach dem Quotientenkriterium, gleich dem Konvergenzradius. Das heisst, es ist $\varrho = 1$.

Bitte wenden!

d) Sei $a_n := 3^n\sqrt{(3n-2)2^n}$. Wir berechnen

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{3^n\sqrt{(3n-2)2^n}}{3^{n+1}\sqrt{(3(n+1)-2)2^{n+1}}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{3n-2}{3n+1}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{3-\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n}}}.$$

Daraus erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{3\sqrt{2}},$$

und damit ist, nach dem Quotientenkriterium, $\varrho = \frac{1}{3\sqrt{2}}$. Alternativ könnte man in diesem Fall auch das Wurzelkriterium anwenden.

e) Sei $a_n := \frac{(2+(-1)^n)^n}{n}$. Dann gilt

$$a_n = \begin{cases} 3^n/n, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 1/n, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Wir teilen die Reihe auf, indem wir Reihenglieder nach geraden und ungeraden Potenzen sortieren und erhalten so

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{2}x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$$

Die Reihe konvergiert für genau die $x\in\mathbb{R}$, für die beide Teilreihen konvergieren. Indem man das Quotientenkriterium sowohl auf den "geraden" Anteil (mit der Substitution $y := x^2$), als auch auf den "ungeraden" Anteil (wobei man zunächst x ausklammere und dann $y := x^2$ substituiere), erhält man für diese die Konvergenzradien $\varrho_0 = \frac{1}{3}$ und $\varrho_1 = 1$. Damit folgt, dass $\varrho = \min\{\varrho_0,\varrho_1\} = \frac{1}{3}$ ist.

f) Für die Koeffizienten a_n der Reihe gilt

$$a_n = \begin{cases} 1/(1+2^n) & \text{falls } n = 5k \text{ mit } k\in\mathbb{Z}^{\geq 0} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Indem wir $y := x^5$ substituieren, erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+2^n}x^{5n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+2^n}y^n.$$

Setzen wir $t := 1+2^n$, so ist $\log(t-1) = \log(2^n) = n\cdot\log 2$ und daher ist $n = \frac{\log(t-1)}{\log 2}$. Mit dem Wurzelkriterium erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|1+2^n|} \\
&= \lim_{n\to\infty}(1+2^n)^{1/n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\exp\left(\log\left((1+2^n)^{1/n}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\exp\left(\log(1+2^n)\cdot\frac{1}{n}\right) & \Big|\, t := 1+2^n \\
&= \lim_{t\to\infty}\exp\left(\frac{\log(t)}{\log(t-1)}\cdot\log 2\right) \\
&= \exp(\log 2) \\
&= 2 & .
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Alternativ kann man das Quotientenkriterium anwenden. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1+2^{n+1}}{1+2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{-n}+2}{2^{-n}+1} = 2.$$

Die Reihe konvergiert also für $|x|^5 = |y| < 2$ und dievergiert für $|x|^5 = |y| > 2$, mit anderen Worten sie konvergiert für $|x| < \sqrt[5]{2}$ und divergiert für $|x| > \sqrt[5]{2}$. Der Konvergenzradius der ursprünglichen Reihe ist also gleich $\varrho = \sqrt[5]{2}$.

2. **a)** Wir zeigen zuerst mit einem Induktionsbeweis, dass für alle $n > 0$

$$|a_n| < 2^n$$

gilt.

- Induktionsverankerung für $n = 0$: Es gilt: $|a_0| = 0 < 1 = 2^0$.
- Induktionsschritt $n \to n+1$: Es ist: $|a_{n+1}| = |a_{n-1}+a_n| \le |a_{n-1}|+|a_n| < 2^{n-1}+2^n = 2^{n-1}(1+2) < 2^{n-1}\cdot 4 = 2^{n+1}$.

Die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n$$

konvergiert für $|z| < \frac{1}{2}$. Nach dem Majorantenkriterium ist der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mindestens $\frac{1}{2}$.

b) Es ist $a_0 := 0$ und $a_1 := 1$ und für alle $n \ge 2$ gilt: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Für $|z| < \frac{1}{2}$ folgern wir daraus

$$\begin{aligned}
(1-z-z^2)f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+2} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} z^n \\
&= a_0 + a_1 z + \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{(a_n - a_{n-1} - a_{n-2})}_{=0} z^n \\
&= z.
\end{aligned}$$

Die Nullstellen des Polynoms $1 - z - z^2$ sind

$$z_0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad z_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

mit $|z_1| > |z_0| > \frac{1}{2}$. Somit ist $1 - z - z^2 \neq 0$ im Bereich $|z| < \frac{1}{2}$, und es folgt

$$f(z) = \frac{z}{1-z-z^2}.$$

c) Die gesuchte Zerlegung heisst **Partialbruchzerlegung** von $\frac{z}{1-z-z^2}$. Zunächst faktorisieren wir den Nenner, wobei wegen $z_0 z_1 = -1$ gilt

$$1 - z - z^2 = -(z-z_0)(z-z_1) = -z_0 z_1\left(\frac{z}{z_0}-1\right)\left(\frac{z}{z_1}-1\right) = (1+z_1 z)(1+z_0 z).$$

Bitte wenden!

Damit machen wir, mit $\lambda := -z_1$ und $\mu := -z_0$, den Ansatz

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \frac{A}{1-\lambda z} + \frac{B}{1-\mu z} = \frac{A}{1+z_1 z} + \frac{B}{1+z_0 z} = \frac{(A+B)+(z_0 A + z_1 B)z}{1-z-z^2}.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert ein lineares Gleichungssystem:

$$\left\{ \begin{array}{c} A+B=0 \\ z_0 A + z_1 B = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} B=-A \\ 1 = A(z_0 - z_1) = A\sqrt{5} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ B = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right\};$$

also ist

$$f(z) = \frac{z}{1-z-z^2} = \frac{1/\sqrt{5}}{1+z_1 z} + \frac{-1/\sqrt{5}}{1+z_0 z}.$$

Für $|z| < \frac{1}{2}$ folgt aus $z_0 z_1 = -1$, dass gilt:

$$|z_0 z| = \frac{|z|}{|z_1|} < 1 \quad \text{und} \quad |z_1 z| = \frac{|z|}{|z_0|} < 1.$$

Somit konvergieren die geometrischen Reihen für beide Brüche, und es folgt:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\infty} (-z_1 z)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\infty} (-z_0 z)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \big((-z_1)^n - (-z_0)^n \big) z^n.$$

Aus dem Potenzreihenidentitätssatz folgt schliesslich die Gleichheit der Koeffizienten:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

3. Wir halten zunächst fest, dass φ eine bijektive Abbildung ist.

a) Für jedes z mit $\mathrm{Im}(z) = 0$ gilt auch $\mathrm{Im}(\varphi(z)) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$, ausserdem gilt $z = \varphi\left(\frac{1}{z}\right)$. Da φ zudem injektiv ist, bildet φ die reelle Achse ohne den Nullpunkt bijektiv auf sich selbst ab.

b) Mit Polarkoordinaten schreibt sich der Kreis um den Ursprung mit Radius r als

$$K_r = \{ r e^{i\theta} \ : \ \theta \in [0, 2\pi[\, \}.$$

Aus

$$\varphi\left(r e^{i\theta}\right) = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

folgt

$$\begin{aligned} \varphi(K_r) &= \left\{ \frac{1}{r} e^{-i\theta} \ : \ \theta \in [0, 2\pi[\right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{r} e^{i\theta} \ : \ \theta \in [0, 2\pi[\right\} \\ &= K_{1/r}. \end{aligned}$$

Hier benutzen wir $e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2\pi)}$. Das Bild von K_r ist also der Kreis um den Ursprung mit Radius $\frac{1}{r}$.

Siehe nächstes Blatt!

c) Für jedes z mit $\mathrm{Re}(z) = 0$ gilt auch $\mathrm{Re}(\varphi(z)) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$, ausserdem gilt $z = \varphi\left(\frac{1}{z}\right)$. Da φ zudem injektiv ist, bildet φ die imaginäre Achse ohne den Nullpunkt bijektiv auf sich selbst ab.

d) Das Urbild eines Punktes $w = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, wobei x und y reell seien, ist

$$z = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}.$$

$\mathrm{Re}(z) = 1$ bedeutet also

$$\frac{x}{x^2+y^2} = 1,$$

was äquivalent ist zu $x^2 - x + y^2 = 0$. Durch quadratisches Ergänzen erhalten wir als weitere äquivalente Umformung

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

Das Bild der Gerade ist also ein Kreis um den Punkt $\frac{1}{2} \in \mathbb{C}$ mit Radius $\frac{1}{2}$, ohne den Nullpunkt (der auf dem Kreis liegt).

4. Es gelten

$$\begin{aligned}
\log(f(t)) &= \log(t^{\sqrt{\log t}}) &&= \sqrt{\log t}(\log t),\\
\log(g(t)) &= \log((\log t)^{\log t}) &&= (\log t)\cdot(\log\log t),\\
\log(h(t)) &= \log\left(\exp\left(\frac{\sqrt{t}}{\log t}\right)\right) &&= \frac{\sqrt{t}}{\log t}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\frac{\log(g(t))}{\log(f(t))} &= \lim_{t\to\infty}\frac{\log\log t}{\sqrt{\log t}} &&= \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}} &&= 0, \quad \text{wobei } x := \log t \text{ ist},\\
\lim_{t\to\infty}\frac{\log(f(t))}{\log(h(t))} &= \lim_{t\to\infty}\frac{(\log t)^{5/2}}{\sqrt{t}} &&= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\log t}{t^{1/5}}\right)^{5/2} &&= 0.
\end{aligned}$$

Für $t \to \infty$ wächst die Funktion $h(t)$ am schnellsten und die Funktion $g(t)$ am langsamsten.