Musterlösung Schnellserie 5

1. a) Unter Verwendung der Produktregel erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
f_1'(x) &= \Big((4x^2-2x\sqrt{x}+x)(2x+x^{-5})\Big)' \\
&= (8x-2(\sqrt{x}+x\frac{1}{2\sqrt{x}})+1)(2x+x^{-5})+(4x^2-2x\sqrt{x}+x)(2-5x^{-6}) \\
&= 16x^2+8x^{-4}-4x\sqrt{x}-2x^{-\frac{9}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{9}{2}}+2x+x^{-5} \\
&\quad +8x^2-20x^{-4}-4x\sqrt{x}+10x^{-\frac{9}{2}}+2x-5x^{-5} \\
&= -4x^{-5}+7x^{-\frac{9}{2}}-12x^{-4}+4x-10x^{\frac{3}{2}}+24x^2.
\end{aligned}
$$

b) Unter Verwendung der Produktregel erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
f_2'(x) &= \Big(e^{3x}(3\sin x-\cos x)\Big)' \\
&= e^{3x}(3\cos x+\sin x)+3e^{3x}(3\sin x-\cos x) \\
&= e^{3x}(3\cos x+\sin x+9\sin x-3\cos x) \\
&= 10e^{3x}\sin x.
\end{aligned}
$$

c) Unter Verwendung der Kettenregel erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
f_3'(x) &= \Big(\log(\sin x)\Big)' \\
&= \frac{1}{\sin x}\cos x = \cot x.
\end{aligned}
$$

d) Hier verwenden wir zunächst die Ketten- und dann die Quotientenregel:

$$
\begin{aligned}
f_4'(x) &= \Big(\sqrt{\frac{x^2-8x+15}{x^2+3x+2}}\Big)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-8x+15}{x^2+3x+2}}}\cdot\Big(\frac{x^2-8x+15}{x^2+3x+2}\Big)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-8x+15}{x^2+3x+2}}}\cdot\frac{(2x-8)(x^2+3x+2)-(x^2-8x+15)(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} \\
&= \frac{(x^2+3x+2)^{\frac{1}{2}}}{2(x^2-8x+15)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(2x^3-2x^2-20x-16)-(2x^3-13x^2+6x+45)}{(x^2+3x+2)^2} \\
&= \frac{(x^2+3x+2)^{\frac{1}{2}}}{2(x^2-8x+15)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(11x^2-26x-61)}{(x^2+3x+2)^2} \\
&= \frac{11x^2-26x-61}{2(x^2-8x+15)^{\frac{1}{2}}(x^2+3x+2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Bitte wenden!

e) Es gilt $x^{\log x} = e^{\log x \cdot \log x} = e^{\log^2 x}$. Daraus folgt mit der Kettenregel

$$f_5'(x) = \left(x^{\log x}\right)' = \left(e^{\log^2 x}\right)' = \frac{2\log x}{x} e^{\log^2 x} = 2\log x \cdot x^{\log(x)-1}.$$

2. **a)** Seien $a, b \in I$ zwei Nullstellen von f mit $a < b$. Die stetige Funktion f besitzt auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ ein Maximum und ein Minimum. Wenn für alle $x \in [a, b]$, $f(x) = 0$ gilt, dann ist jede Stelle zwischen a und b eine Extremalstelle. Anderfalls existiert $x \in [a, b]$ mit $f(x) \neq 0$. Ist dieses $f(x) > 0$, so gilt das auch für das Maximum von f auf $[a, b]$, und wegen $f(a) = f(b) = 0$ muss dieses Maximum auf $]a, b[$ angenommen werden. Ist $f(x) < 0$, so gilt das Gleiche für das Minimum von f auf $[a, b]$, und wegen $f(a) = f(b) = 0$ muss dieses auf $]a, b[$ angenommen werden.

b) Aus dem Mittelwertsatz folgt, dass (echt) zwischen je zwei Nullstellen von f mindestens eine Nullstelle von f' liegt. Jede Kollektion von $n + 1$ Nullstellen von f können wir in der Form $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ anordnen. In jedem der n offenen Teilintervalle $]x_{i-1}, x_i[$ liegt dann eine Nullstelle von f', und damit haben wir mindestens n Nullstellen von f'. Das zeigt die gewünschte Ungleichung, wenn f nur endlich viele Nullstellen hat. Hat f unendlich viele Nullstellen, dann gilt das Argument für jede endliche Kollektion von Nullstellen von f für beliebiges n; der Grenzübergang $n \to \infty$ zeigt dann, dass auch f' unendlich viele Nullstellen hat.

c) Gesucht ist die Anzahl der Nullstellen der beliebig oft differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2^x - x^2$. Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log 2 \cdot 2^x - 2x, \\ f''(x) &= (\log 2)^2 \cdot 2^x - 2, \\ f'''(x) &= (\log 2)^3 \cdot 2^x > 0 \end{aligned}$$

d.h. f''' hat keine Nullstelle. Mit Teil b) folgt zuerst dass f'' höchstens eine Nullstelle haben kann, dann dass f' höchstens zwei Nullstellen haben kann und schliesslich dass f höchstens 3 Nullstellen haben kann. Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2^{-1} - (-1)^2 = -\frac{1}{2} < 0, \\ f(0) &= 2^0 - 0^2 = 1 > 0, \\ f(3) &= 2^3 - 3^2 = -1 < 0, \\ f(5) &= 2^5 - 5^2 = 7 > 0 \end{aligned}$$

und wegen dem Zwischenwertsatz hat f in jedem Intervall $]-1, 0[$, $]0, 3[$, $]3, 5[$ mindestens eine Nullstelle. Damit hat f also mindestens 3 Nullstellen. Es folgt somit, dass f genau drei Nullstellen hat und daher besitzt die Gleichung $2^x = x^2$ genau drei reelle Lösungen.

Bemerkung: Die Werte $x = 2$ und $x = 4$ lösen die Gleichung $2^x = x^2$.

3. **a)** Es gilt $f_1(x) = -1 + \frac{2}{1+x^2}$. Dieser Ausdruck wird maximal, wenn der Nenner des Bruchs minimal wird, also genau für $x = 0$. Daher ist der Nullpunkt die eindeutige globale Maximalstelle von f.

Siehe nächstes Blatt!

b) Es gilt:

$$\lim_{x\to\infty} f_2(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x}{x^2+2} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2+2}}_{=\infty} - \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+2}}_{=0} = \infty.$$

Deshalb besitzt f_2 kein Maximum.

c) Da f_3 stetig ist, nimmt f_3, für jedes $\alpha > 0$, ein Maximum $x_\alpha \in \mathbb{R}$ auf dem kompakten Intervall $[-\alpha, \alpha]$ an. Es gilt:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_3(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^4 + x^3 + x - 1}{x^2+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4(-1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4})}{x^2(1+\frac{3}{x^2})} = -\infty.$$

Daher ist für hinreichend grosses $\alpha > 0$, x_α ein globales Maximum.

d) Für $x \neq 0$ gilt $0 < e^{-x^2} < 1$ und $\cos x \leq 1$ und damit $f_4(x) < 1$. Wegen $f_4(0) = 1$ ist also der Nullpunkt die eindeutige globale Maximalstelle von f_4.

e) Da f_5 stetig ist, nimmt f_5, für jedes $\alpha > 0$, ein Maximum $x_\alpha \in \mathbb{R}$ auf dem kompakten Intervall $[-\alpha, \alpha]$ an. Es gilt $\lim_{x\to\pm\infty} f_5(x) = 0$ und f_5 nimmt für $|x| > 1$ positive Werte an. Daher ist für hinreichend grosses $\alpha > 0$, x_α ein globales Maximum von f_5.

4. a) Die Ableitung von f_λ ist $f_\lambda'(x) = 4x^3 + 2\lambda x = x(4x^2 + 2\lambda)$.

1. Fall: $\lambda < 0$.

In diesem Fall hat f_λ' drei Nullstellen und damit hat f_λ drei kritische Punkte, nämlich 0 und $\pm\sqrt{-\frac{\lambda}{2}}$. Es gilt:

$$\operatorname{sign}(f_\lambda'(x)) = \operatorname{sign}(x) \cdot \operatorname{sign}(4x^2 + 2\lambda) = \begin{cases} +1, & \text{falls } x \in \left]-\sqrt{-\frac{\lambda}{2}}, 0\right[\cup \left]\sqrt{-\frac{\lambda}{2}}, \infty\right[\\ -1, & \text{falls } x \in \left]-\infty, -\sqrt{-\frac{\lambda}{2}}\right[\cup \left]0, \sqrt{-\frac{\lambda}{2}}\right[\end{cases}.$$

Daher folgt, mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass f_λ auf $\left]-\sqrt{-\frac{\lambda}{2}}, 0\right[\cup \left]\sqrt{-\frac{\lambda}{2}}, \infty\right[$ streng monoton wächst und auf $\left]-\infty, -\sqrt{-\frac{\lambda}{2}}\right[\cup \left]0, \sqrt{-\frac{\lambda}{2}}\right[$ streng monoton fällt. Somit ist also 0 eine lokale Maximalstelle und $\pm\sqrt{-\frac{\lambda}{2}}$ sind lokale Minimalstellen. Da $\lim_{x\to\pm\infty} f_\lambda(x) = \infty$ gilt, ist 0 keine global Maximalstelle, jedoch sind $\pm\sqrt{-\frac{\lambda}{2}}$ globale Minimalstellen.

2. Fall: $\lambda \geq 0$.

Hier ist 0 die einzige Nullstelle von f_λ' und damit der Nullpunkt der einzige kritische Punkt. Bemerke, dass f_λ eine gerade Funktion ist und dass $\lim_{x\to\pm\infty} f_\lambda(x) = \infty$ gilt. Daher ist also 0 die eindeutige globale Minimalstelle von f_λ.

Siehe Abbildung 1 für die Graphen von f_{-1} und f_1.

b) Wie schon in a) besprochen, sind die kritischen Punkte von f_λ $\left\{0, \pm\sqrt{-\frac{\lambda}{2}}\right\}$, falls $\lambda < 0$. Falls $\lambda \geq 0$, so ist 0 der einzige kritische Punkt von f_λ. Siehe Abbildung 2.

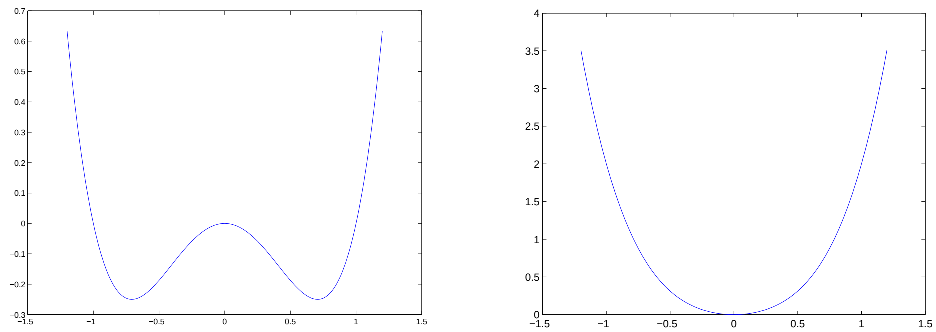

Abbildung 1: Graph(f_{-1}) und Graph(f_1)

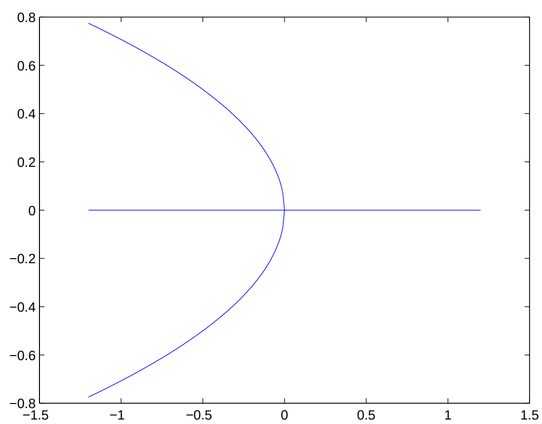

Abbildung 2: Die Menge $\{(\lambda, x) \in \mathbb{R}^2 : f'_\lambda(x) = 0\}$. Dabei ist die λ-Achse horizontal und die x-Achse vertikal.