Musterlösung Schnellserie 6

1. **a)** Wir wenden den Mittelwertsatz auf den Logarithmus $\log :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, um die Ungleichung

$$\log(x) \leq x - 1$$

zu zeigen. Wir werden sehen, dass sich die zweite Ungleichung darauf zurückführen lässt.

1. Fall: $0 < x < 1$. Aufgrund des Mittelwertsatzes existiert für jedes $0 < x < 1$ ein $u \in]x, 1[$, so dass

$$\frac{\log x}{x-1} = \frac{\log x - \log 1}{x-1} = (\log)'(u) = \frac{1}{u}$$

gilt. Wegen $u \in]x, 1[$ gilt $\frac{1}{u} > 1$ und wir erhalten

$$\frac{\log x}{x-1} > 1,$$

also insbesondere $\log x \leq x - 1$ (Achtung Vorzeichenwechsel, da wir mit einer negative Zahl multiplizieren!).

2. Fall: $x = 1$. Es gilt $\log 1 = 0 = 1 - 1$, d.h. die Ungleichung gilt in diesem Fall.

3. Fall: $x > 1$. Aufgrund des Mittelwertsatzes existiert ein $u \in]1, x[$ mit

$$\frac{\log x}{x-1} = \frac{\log x - \log 1}{x-1} = (\log)'(u) = \frac{1}{u}.$$

Wegen $\frac{1}{u} < 1$ folgt daraus die gewünschte Ungleichung auch in diesem Fall.

Die Ungleichung $1 - \frac{1}{x} \leq \log x$ für alle $x > 0$ ergibt sich nun durch Anwendung der gerade bewiesenen Ungleichung auf $y = \frac{1}{x}$:

$$\log x = -\log \frac{1}{x} = -\log y \geq y - 1 = \frac{1}{x} - 1.$$

b) Wir wenden hier den Mittelwertsatz auf die Funktion $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+x}$, an. Diese ist differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x+1}}$. Ausserdem ist $f(0) = 1$. Nach dem Mittelwertsatz existiert für jedes $x > 0$ ein $u \in]0, x[$ mit

$$\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(u) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{u+1}}.$$

Wegen $u > 0$ ist der rechte Term $< \frac{1}{2}$, so dass wir

$$\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} < \frac{1}{2},$$

erhalten, was äquivalent zur gewünschten Ungleichung $\sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2}$ ist.

2. Das Taylorpolynom 4. Grades um x_0 ist $j^4_{x_0} f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$

Bitte wenden!

a) Sei $f(x) = \frac{1}{1+x}$ und $x_0 = \frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{rclcrclcl}
f(x) & = & (1+x)^{-1} & & f(\frac{1}{2}) & = & \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} & = & \frac{2}{3} \\
f'(x) & = & -(1+x)^{-2} & & \frac{f'(\frac{1}{2})}{1!} & = & -\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} & = & -\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \\
f''(x) & = & 2(1+x)^{-3} & & \frac{f''(\frac{1}{2})}{2!} & = & \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}}{2!} & = & \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^{3}}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3} \\
f'''(x) & = & -3!(1+x)^{-4} & & \frac{f'''(\frac{1}{2})}{3!} & = & \frac{-6\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}}{3!} & = & \frac{-6\left(\frac{2}{3}\right)^{4}}{6} = -\left(\frac{2}{3}\right)^{4} \\
f^{(4)}(x) & = & 4!(1+x)^{-5} & & \frac{f^{(4)}(\frac{1}{2})}{4!} & = & \frac{4!\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}}{4!} & = & \left(\frac{2}{3}\right)^{5}
\end{array}$$

Damit erhalten wir

$$j^4_{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(x - \frac{1}{2}\right)^4.$$

Alternative: Mittels der Umformung

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{\frac{3}{2} - (\frac{1}{2} - x)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}(\frac{1}{2} - x)}$$

erhalten wir die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1+x} = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - x\right)\right]^k,$$

die genau der Taylorreihe von $\frac{1}{1+x}$ an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$ entspricht.

b) Sei $g(x) = x^7$ und $x_0 = 2$.

$$\begin{array}{rclcrclcl}
g(x) & = & x^7 & & g(2) & = & 2^7 & = & 128 \\
g'(x) & = & 7x^6 & & g'(2) & = & 7 \cdot 2^6 & = & 448 \\
g''(x) & = & 42x^5 & & g''(2) & = & 42 \cdot 2^5 & = & 1344 \\
g'''(x) & = & 210x^4 & & g'''(2) & = & 210 \cdot 2^4 & = & 3360 \\
g^{(4)}(x) & = & 840x^3 & & g^{(4)}(2) & = & 840 \cdot 2^3 & = & 6720
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
j^4_2 g(x) &= 128 + \frac{448}{1!}(x-2) + \frac{1344}{2!}(x-2)^2 + \frac{3360}{3!}(x-2)^3 + \frac{6720}{4!}(x-2)^4 \\
&= 128 + 448(x-2) + 672(x-2)^2 + 560(x-2)^3 + 280(x-2)^4
\end{aligned}$$

Alternative: Wir können $x^7 = ((x-2)+2)^7$ als binomische Reihe entwicklen und erhalten

$$x^7 = ((x-2)+2)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} (x-2)^k 2^{7-k}$$

die genau der Taylorreihe von x^7 an der Stelle $x_0 = 2$ entspricht.

c) Sei $h(x) = \log \cos x$ und $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Siehe nächstes Blatt!

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \log\cos x \\
h\Big(\frac{\pi}{4}\Big) &= \log\cos(\frac{\pi}{4}\Big) = \log\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\log 2 \\
h'(x) &= \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x \\
h'\Big(\frac{\pi}{4}\Big) &= -\tan\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = -1 \\
h''(x) &= -\frac{1}{\cos^2 x} \\
h''\Big(\frac{\pi}{4}\Big) &= -\cos^{-2}\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = -\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{-2} = -2 \\
h'''(x) &= -\frac{2\sin x}{\cos^3 x} \\
h'''\Big(\frac{\pi}{4}\Big) &= -\frac{2\sin(\pi/4)}{\cos^3(\pi/4)} = -\frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^3} = -4 \\
h^4(x) &= -\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{6\sin^2 x}{\cos^4 x} \\
h^4\Big(\frac{\pi}{4}\Big) &= -\frac{2}{\cos^2(\pi/4)} - \frac{6\sin^2(\pi/4)}{\cos^4(\pi/4)} = -\frac{2}{1/2} - \frac{6\cdot 1/2}{(1/2)^2} = -16
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
j_2^4 h(x) &= -\frac{1}{2}\log 2 + \frac{-1}{1!}(x-\frac{\pi}{4}) + \frac{-2}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2 + \frac{-4}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3 + \frac{-16}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4 \\
&= -\frac{1}{2}\log 2 - (x-\frac{\pi}{4}) - (x-\frac{\pi}{4})^2 - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{4})^3 - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{4})^4
\end{aligned}
$$

3. Die Rekursionsbeziehung im Newtonverfahren lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

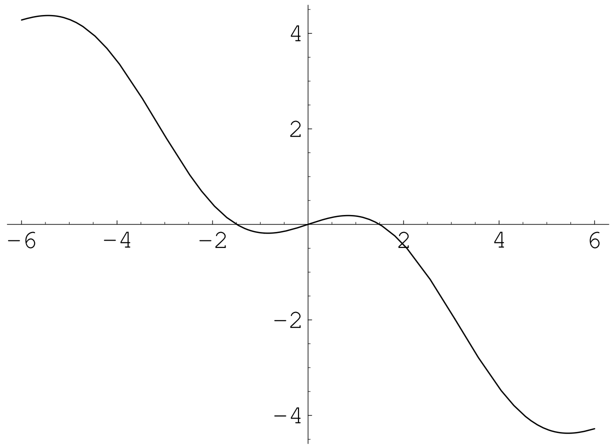
In unserem Beispiel ist $f(x) = \sin x - \frac{2}{3}x$ und somit $f'(x) = \cos(x) - \frac{2}{3}$. Also ist

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\sin x_n - \frac{2}{3}x_n}{\cos x_n - \frac{2}{3}} = \frac{x_n(\cos x_n - \frac{2}{3}) - (\sin x_n - \frac{2}{3}x_n)}{\cos x_n - \frac{2}{3}} = \frac{x_n \cos x_n - \sin x_n}{\cos x_n - \frac{2}{3}}.$$

Zusatz:

Der untenstehende Graph legt nahe, dass $\sin x - \frac{2}{3}x$ drei Nullstellen hat, eine bei 0, und je eine etwa bei ± 1.5. Nahe bei $\pm\arccos(2/3) \approx \pm 0.85$ ist $f'(x)$ klein, daher ist das Verhalten des Newtonverfahrens bei den in der Nähe liegenden Startwerten 0.904, 0.905 und 0.906 schlecht prognoszierbar.
In der Tat stellen wir fest, dass mit den Startwerten 0.904 und 0.905 die Nullstelle -1.4957... gefunden wird, das Verfahren für den Startwert 0.906 aber gegen 0 konvergiert.

Bitte wenden!



Mathematica-Code:

```
In[1]:=  x[n_] := (x[n - 1] Cos[x[n - 1]] - Sin[x[n - 1]]) / (Cos[x[n - 1]] - 2 / 3)

In[2]:=  x[0] = 0.904;
         Table[x[n], {n, 1, 8}]

Out[3]=  {4.70399, -1.42276, -1.50088, -1.4958, -1.49578, -1.49578, -1.49578, -1.49578}

In[4]:=  x[0] = 0.905;
         Table[x[n], {n, 1, 8}]

Out[5]=  {4.64301, -0.918122, -3.99092, -1.42042, -1.50123, -1.49581, -1.49578, -1.49578}

In[6]:=  x[0] = 0.906;
         Table[x[n], {n, 1, 8}]

Out[7]=  {4.58393, -0.508976, 0.207298, -0.0094787, 8.51729×10^-7, -6.17805×10^-19, 0., 0.}
```

4. Für $n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ setzen wir $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$. Es ist zu zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert und im Intervall $[0,1]$ liegt. Da das Reimann-Integral monoton ist und die Funktion $[1,\infty[\to]0,\infty[: x \mapsto \frac{1}{x}$ monoton fallend ist, gilt für jedes $k \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$:

$$\frac{1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx = \frac{1}{k+1}. \tag{1}$$

Daher gilt für jedes $n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$

$$a_{n+1} - a_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^{n} \frac{1}{x}\,dx\right) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \overset{(1)}{\leq} 0$$

und somit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^{\geq 1}}$ monoton fallend.

Durch summieren folgt, für alle $n \in \mathbb{Z}^{\geq 2}$, aus der Ungleichung (1) weiter

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1.$$

Somit gilt für alle $n \in \mathbb{Z}^{\geq 2}$

Siehe nächstes Blatt!

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx}_{\geq 0} \geq \frac{1}{n} \geq 0$$

$$a_n - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx - 1 \leq 0 \implies a_n \leq 1.$$

und daher $0 \leq a_n \leq 1$. Wir erhalten also, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^{\geq 2}}$ eine monoton fallende, beschränkte Folge ist, deren Folgenglieder im Intervall $[0,1]$ liegen. Daher existiert der Grenzwert $\gamma := \lim_{n\to\infty} a_n \in [0,1]$.

Zusatz:

Die Existenz dieses Grenzwertes wurde von Euler entdeckt und besagt, dass die Folge der Partialsummen der harmonischen Reihe etwa wie der Logarithmus anwächst. Der Grenzwert γ wird auch *Euler-Konstante* genannt. Es ist unbekannt ob γ rational ist oder nicht.