Musterlösung Schnellserie 7

1. a) Die Summe $\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ ist die Riemann-Summe von $\sin x$ bezüglich der Zerlegung $0 < \frac{\pi}{n} < \frac{2\pi}{n} < \frac{3\pi}{n} \ldots < \frac{n\pi}{n} = \pi$ des Intervalls $[0, \pi]$ und den Stützstellen $x_k := \frac{k\pi}{n}$, für alle $0 \leq k \leq n$. Da die Funktion $x \mapsto \sin x$ auf $[0, \pi]$ stetig ist, ist sie insbesondere Riemann-integrierbar. Daher erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

b) Die Summe $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(k/n)^2}}$ ist die Riemann-Summe der Riemann-integrierbaren Funktion $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ bezüglich der Zerlegung $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n}{n} = 1$ des Intervalls $[0, 1]$ und den Stützstellen $x_k := \frac{k}{n}$, für alle $0 \leq k \leq n-1$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(k/n)^2}} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= \arcsin x \Big|_0^1 \\
&= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

c) Wir formen um:

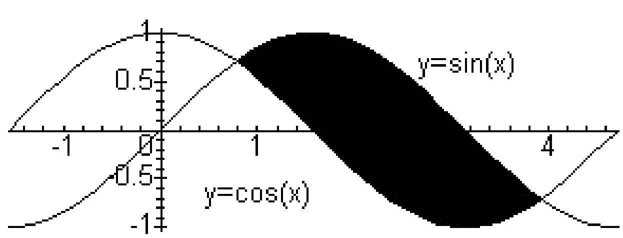
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{k/n^2} &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\log\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{k/n^2}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \log\left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \cdot \frac{k}{n}\right).
\end{aligned}$$

Nun bemerken wir, dass die Summe $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \log\left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \cdot \frac{k}{n}$ die Riemann-Summe der Riemann-integrierbaren Funktion $x \mapsto \log(1 + x^2)x$ bezüglich der Zerlegung $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n}{n} = 1$ des Intervalls $[0, 1]$ und den Stützstellen $x_k := \frac{k}{n}$, für alle $1 \leq k \leq n$ ist. Mit der Substitution $t = 1 + x^2$, $dt = 2x\,dx$ und der Stetigkeit der Exponentialfunktion erhalten wir also

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{k/n^2} &= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\log\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\cdot\frac{k}{n}\right)\\
&= \exp\left(\int_0^1 \log(1+x^2)\cdot x\,dx\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\int_1^2 \log t\,dt\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\left(t\log t - t\right)\Big|_1^2\right)\\
&= \exp\left(\log 2 - 1 - \frac{1}{2}\log 1 + \frac{1}{2}\right)\\
&= \exp\left(\log 2 - \frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{2}{\sqrt{e}}.
\end{aligned}
$$

2. Zuerst müssen wir die Integrationsgrenzen bestimmen. Diese sind gegeben durch die Bedingungen $\cos x = \sin x$, das heisst $\tan x = 1$, und $x \in [0,\pi]$. Da $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, sind die Lösungen der Gleichung $\tan x = 1$ die Punkte: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, für alle $k \in \mathbb{Z}$. Folglich ist die linke Grenze der Punkt $x = \frac{\pi}{4}$ und die rechte der Punkt $x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi$. Die gesuchte Fläche F ist also gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
F = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (\sin x - \cos x)\ dx &= -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\\
&= -\cos\frac{5}{4}\pi + \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{5}{4}\pi + \sin\frac{\pi}{4}\\
&= -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\,.
\end{aligned}
$$



3. Wir erinnern daran, dass für jede durch eine Potenzreihe gegebene Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, also mit

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad \text{für alle} \quad x \in I,
$$

Siehe nächstes Blatt!

diese Reihe gleich der Taylor-Reihe von f an der Stelle x_0 ist. Wir wählen deswegen zur Lösung der Aufgabe die Strategie, einen Darstellung von $f = 2/(1-x+x^2-x^3)$ durch eine Potenzreihe zu finden. Es ist $x = 1$ eine Nullstelle des Nenners $1 - x + x^2 - x^3$. Mittels Polynomdivision des Nenners durch den Linearfaktor $(1 - x)$ erhalten wir die Faktorisierung

$$1 - x + x^2 - x^3 = (1 - x)(1 + x^2).$$

Damit können wir nun folgenden Ansatz für die Partialbruchzerlegung machen:

$$\frac{2}{1 - x + x^2 - x^3} = \frac{2}{(1 - x)(1 + x^2)} = \frac{a}{1 - x} + \frac{b + cx}{1 + x^2}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\frac{2}{1 - x + x^2 - x^3} = \frac{a(1 + x^2) + (b + cx)(1 - x)}{(x - 1)(1 + x^2)} = \frac{(a - c)x^2 + (c - b)x + a + b}{(x - 1)(1 + x^2)},$$

und ein Koeffizientenvergleich liefert $a = b = c = 1$. Es ist also

$$f(x) = \frac{1}{1 - x} + \frac{1 + x}{1 + x^2}.$$

Der erste Summand dieses Ausdrucks wird für $|x| < 1$ durch die geometrische Reihe dargestellt:

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Den zweiten Summanden können wir schreiben als $(1 + x) \cdot \frac{1}{1-(-x^2)}$; den zweiten Faktor darin können wir für $|x^2| < 1$ ebenfalls als Potenzreihe ausdrücken, indem wir $-x^2$ in die geometrische Reihe einsetzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1 + x}{1 + x^2} &= (1 + x) \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Da $|x^2| < 1$ äquivalent zu $|x| < 1$ ist, folgt für alle $|x| < 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + (-1)^n\right) x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + (-1)^n\right) x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{4n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{4n+1}. \end{aligned}$$

Also gilt für alle $x \in]-1, 1[$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{mit} \quad a_n = \begin{cases} 2 & \text{falls } n = 4k \text{ oder } n = 4k + 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wie oben bemerkt, entspricht dies gerade der Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Bitte wenden!

4. a) Partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned}\int \underbrace{\sinh t}_{\uparrow} \cdot \underbrace{\cos t}_{\downarrow}\, dt &= \cosh t \cdot \cos t - \int \cosh t \cdot (-\sin t)\, dt \\ &= \cosh t \cdot \cos t + \int \underbrace{\cosh t}_{\uparrow} \cdot \underbrace{\sin t}_{\downarrow}\, dt \\ &= \cosh t \cdot \cos t + \sinh t \cdot \sin t - \int \sinh t \cdot \cos t\, dt.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int \sinh t \cdot \cos t\, dt = \frac{1}{2}\left(\cosh t \cdot \cos t + \sinh t \cdot \sin t\right) + C.$$

b) Um den Term $\sqrt{t}$ weg zu bekommen substituieren wir $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$ und erhalten

$$\int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}-t}\, dt = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-x^2} \cdot 2x\, dx = 2\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}\, dx.$$

Nun bietet sich die Standard-Substitution $x = \sin u$, $dx = \cos u\, du$ an, welche folgendes liefert:

$$\begin{aligned}2\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}\, dx &= 2\int \frac{\sqrt{1-\sin^2 u}}{1-\sin u} \cdot \cos u\, du \\ &= 2\int \frac{\cos^2 u}{1-\sin u}\, du \\ &= 2\int \frac{1-\sin^2 u}{1-\sin u}\, du \\ &= 2\int \frac{(1-\sin u)(1+\sin u)}{1-\sin u}\, du \\ &= 2\int 1+\sin u\, du \\ &= 2u - 2\cos u + C \\ &= 2\arcsin\sqrt{t} - 2\cos(\arcsin\sqrt{t}) + C \\ &= 2\arcsin\sqrt{t} - 2\cos(\arccos\sqrt{1-t}) + C \\ &= 2\arcsin\sqrt{t} - 2\sqrt{1-t} + C.\end{aligned}$$

c) Wir verwenden die Substitution $x = t^2+1$, $dx = 2t\,dt$ und erhalten

$$\begin{aligned}\int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\, dt &= \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{\sqrt{x}}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int x^{1/2} - x^{-1/2}\, dx \\ &= \frac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2} + C \\ &= \frac{(t^2+1)^{3/2}}{3} - \sqrt{t^2+1} + C.\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

d) Wir verwenden die bekannte Beziehung $(\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}$ und erhalten durch partielle Integration

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{t^3}_{\uparrow} \underbrace{\arctan t}_{\downarrow} \, dt &= \frac{t^4}{4} \arctan t - \frac{1}{4} \int \frac{t^4}{1+t^2} \, dt \\
&= \frac{t^4}{4} \arctan t - \frac{1}{4} \int \frac{t^4 - 1}{t^2+1} \, dt - \frac{1}{4} \int \frac{1}{t^2+1} \, dt \\
&= \frac{t^4}{4} \arctan t - \frac{1}{4} \int (t^2 - 1) \, dt - \frac{1}{4} \int \frac{1}{t^2+1} \, dt \\
&= \frac{t^4}{4} \arctan t - \frac{t^3}{12} + \frac{t}{4} - \frac{1}{4} \arctan t + C \\
&= \frac{t^4 - 1}{4} \arctan t - \frac{t^3}{12} + \frac{t}{4} + C.
\end{aligned}$$