Musterlösung 1

1. **a)** Wir betrachten zuerst die Folge a_n. **Verankerung:** $n = 1$:

$$a_1 = 1(1+1) = 2 = \frac{(1)(1+1)(1+1+1)}{3}$$

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Gleichung für n gilt:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Wir müssen zeigen, dass die Gültigkeit der Gleichung für $n+1$ aus der Induktionsvoraussetzung folgt: $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \left(\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\right) + (n+1)(n+2) = a_n + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \end{aligned}$$

Bei der Folge b_n geht man analog vor.

Verankerung: $b_1 = 1(1+1)(1+1+1) = 6 = \frac{(1)(1+1)(1+1+1)(1+1+1+1)}{4}$.
Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = b_n + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4} \end{aligned}$$

b) Wir stellen fest, dass $\forall x > -1 : 1+x > 0$ gilt. Deshalb gilt auch $\forall x > -1, \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 0} : (1+x)^n > 0$.

Verankerung: $n = 0$:

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0 \cdot x.$$

Induktionsschritt:

Annahme:

$$\forall x > -1: \ (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

$n \to n+1$:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2$$
$$\geq 1 + (n+1)x.$$

c) Der Schritt von $k = 1$ zu $k + 1 = 2$ ist falsch!
Wenn man je 1 Pferd wegnimmt, ist das übriggebliebene Pferd zwar einfarbig, aber entgegen der Behauptung müssen die Farben nicht gleich sein.

2. **a)**
- Für $x \geq -3$ gilt $|x+3| \geq 3 \Leftrightarrow x + 3 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 0$.
- Für $x \leq -3$ gilt $|x+3| \geq 3 \Leftrightarrow -x - 3 \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -6$.

Also gilt $|x+3| \geq 3 \Leftrightarrow (x \geq 0 \vee x \leq -6)$.

b) Mit einer Fallunterscheidung wie bei Teilaufgabe a) oder mit der Dreiecks-Ungleichung

$$|x| = |(x-2) + 2| \leq |x-2| + |2| = |x-2| + 2$$

erhält man, dass für alle $x \in \mathbb{R}$, $|x-2| \geq |x| - 2$ gilt.

c)
- Für $x = -2$ ist die linke Seite nicht definiert.
- Für $x > -2$ gilt $x + 2 > 0$ und daher

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x+2} \geq 2 - x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 2 \geq (2-x)(x+2) = 4 - x^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

- Für $x < -2$ gilt $x + 2 < 0$ und daher

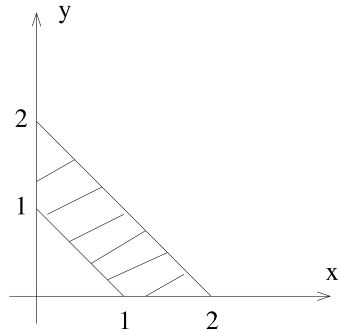
$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x+2} \geq 2 - x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 2 \leq (2-x)(x+2) = 4 - x^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

  Da $\frac{1-\sqrt{5}}{2} > -2$ ist, sind diese Ungleichungen für kein $x < -2$ erfüllt.

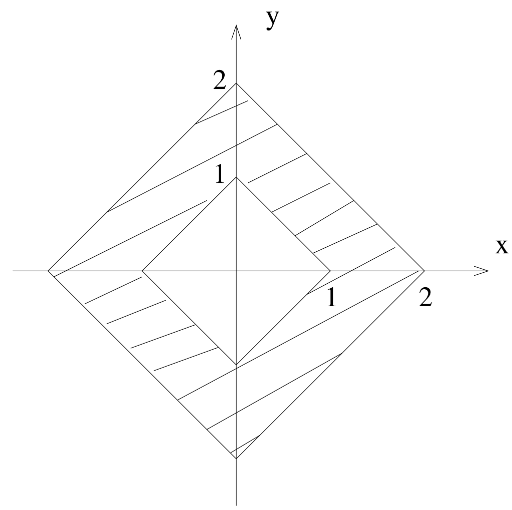
Insgesamt folgt also: $\frac{x^2-2x+2}{x+2} \geq 2 - x \ \Leftrightarrow \ -2 < x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ \vee \ x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Siehe nächstes Blatt!

d) Im Bereich $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ wird die Bedingung $1 \leq |x| + |y| \leq 2$ zu $1 \leq x + y \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x \leq y \leq 2 - x$. Daher sieht die Menge im ersten Quadranten folgendermassen aus:



Aus Symmetriegründen erhält man insgesamt folgendes Bild:



3. **a)** Quadratische Ergänzungen ergeben:
$x^2 - 2x - 4 = (x-1)^2 - 5$
$4y - y^2 = -(y-2)^2 + 4$
Also lautet die Bedingung: $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 9 = 3^2$.
Die Ungleichung beschreibt also die Kreisscheibe mit Mittelpunkt (1,2) und Radius 3.

b) Wegen $(y-2)^2 \geq 0$ ist x maximal für $y = 2$. Die Bedingung (1) ist dann äquivalent zu $(x-1)^2 \leq 9 \Leftrightarrow |x-1| \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$.
$\Rightarrow$ Der Maximale Wert für x ist 4 und wird nur für $y = 2$ angenommen.