Musterlösung 10

1. Oft sind mehrere Rechenwege gleich günstig; im Folgenden ist aber meistens nur einer ausgeführt.

a) Sowohl der Zähler als auch der Nenner streben für $x \to 0$ gegen 0. Damit ist die Regel von de l'Hôpital anwendbar und liefert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cdot e^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x}{1} = \frac{\cos 0 \cdot e^0 + \sin 0 \cdot e^0}{1} = 1.$$

b) Wir formen zunächst um:

$$\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x + e^x - 1}{\sin x \cdot (e^x - 1)}.$$

Für $x = 0$ haben Zähler und Nenner beide den Wert 0, und wir erhalten mit Hilfe der Regel von de l'Hôpital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - (e^x - 1)}{\sin x \cdot (e^x - 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x}{e^x \sin x + (e^x - 1)\cos x}.
\end{aligned}$$

Da für den letzten Ausdruck wiederum Zähler und Nenner bei 0 den Wert 0 annehmen, können wir de l'Hôpital erneut anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}
\ldots &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - e^x}{e^x \cos x + e^x \sin x - (e^x - 1)\sin x + e^x \cos x} \\
&= \frac{\sin 0 - e^0}{e^0 \cos 0 + e^0 \sin 0 - (e^0 - 1)\sin 0 + e^0 \cos 0} \\
&= \frac{-1}{1 + 0 - 0 + 1} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

c) Wir schreiben

$$x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}.$$

Bitte wenden!

Für $x \to \infty$ streben sowohl der Zähler als auch der Nenner gegen 0. Also ist die Regel von de l'Hôpital anwendbar, und mit der aus Serie 9 Aufgabe 3 f) bekannten Formel $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

d) In diesem Fall ist ein direktes Vorgehen einfacher als die Anwendung von de l'Hôpital. Es gilt

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x+2}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} - \sqrt{\frac{3x+2}{x}} = \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{3+\frac{2}{x}} \xrightarrow{x\to\infty} 1-\sqrt{3}.$$

e) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\lim_{x\to 0+} x\log x = 0$ gilt. Im Ausdruck $\frac{\sin x}{x}$ haben sowohl der Zähler, als auch der Nenner für $x = 0$ den Wert 0. Also ist die Regel von de l'Hôpital in der folgenden Rechnung anwendbar:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\lim_{x\to 0+} \sin x \cdot \log x = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \cdot x\log x = 1 \cdot 0 = 0.$$

f) Wir formen den Ausdruck um zu

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x}.$$

Zähler und Nenner dieses Ausdrucks haben für $x = 0$ den Wert 0. Also ist die Regel von de l'Hôpital anwendbar und liefert uns

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x\sin x + x^2\cos x}.$$

Auch hier nehmen Zähler und Nenner für $x = 0$ den Wert 0 an und die Regel von de l'Hôpital ergibt

$$\cdots = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\sin x + 4x\cos x - x^2\sin x}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Wiederum nehmen Zähler und Nenner für $x = 0$ den Wert 0 an. Durch eine dritte Anwendung der Regel von de l'Hôpital erhalten wir

$$\begin{aligned}
\ldots &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2\cos x + 4\cos x - 4x\sin x - 2x\sin x - x^2\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6\cos x - 6x\sin x - x^2\cos x} \\
&= \frac{\cos 0}{6\cos 0 - 6\cdot 0\cdot \sin 0 - 0^2\cdot\cos 0} \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Alternativ kann man die Potenzreihendarstellung des Sinus verwenden:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} &= \frac{x - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \\
&= \frac{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+3}}{(2n+1)!}} \\
&= \frac{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!}}{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}} \\
&= \frac{\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}x^2 + \ldots}{1 - \frac{1}{3!}x^2 + \ldots}.
\end{aligned}$$

Für $x \to 0$ streben alle positiven Potenzen von x im Zähler und Nenner gegen 0 und der Grenzwert des Ausdrucks ist damit $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

g) Der Grenzwert des Zählers ist 0, der des Nenners ist -1 und wir erhalten

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t + \sin 3t}{\cos 2t} = \frac{\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2}}{\cos\pi} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Die Regel von de l' Hôpital ist hier *nicht* anwendbar!

h) Wir formen zunächst den Ausdruck um:

$$\sqrt[x]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right).$$

Bitte wenden!

Da die Exponentialfunktion stetig ist, gilt

$$\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}\right).$$

Der Zähler und der Nenner des inneren Ausdruck nehmen für $x = 0$ den Wert 0 an. Mit de l'Hôpital erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

und damit

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+x} = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}\right) = \exp(1) = e.$$

2. **a)** Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Dieses liegt entweder am Rand des Definitionsbereichs oder im Innern. Da f im Innern differenzierbar ist, muss es im letzteren Fall ein kritischer Punkt sein. Wir rechnen:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = (3x+4)(x-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \left\{2,\ -\frac{4}{3}\right\}.$$

Die einzigen Kandidaten für globale Extremstellen sind also die Randpunkte -2, 2 und der innere Punkt $-\frac{4}{3}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen lauten:

$$\begin{aligned} f(2) &= -11 \\ f(-\tfrac{4}{3}) &= \tfrac{203}{27} \approx 7.519 \\ f(-2) &= 5 \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x = -\frac{4}{3}$, der kleinste der bei $x = 2$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x = -\frac{4}{3}$ und ein globales Minimum bei $x = 2$.

b) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wenn es im Innern des Definitionsbereichs liegt, so muss es ein kritischer Punkt von f sein, da f dort differenzierbar ist. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1\cdot(x^2+1) - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} = 0 \\ \Leftrightarrow &\quad -x^2 - 2x + 1 = 0 \end{aligned}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Siehe nächstes Blatt!

ist. Der Wert $-1-\sqrt{2} < -1$ liegt nicht im Definitionsintervall von f, der Wert $-1+\sqrt{2}$ dagegen schon. Die Kandidaten für globale Extremalstellen sind also $\left\{-1, -1+\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right\}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0 \\ f(-1+\sqrt{2}) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}+2} = \tfrac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} \cdot \tfrac{4+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \tfrac{4(\sqrt{2}+1)}{8} = \tfrac{\sqrt{2}+1}{2} = 1.207\ldots \\ f(\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{6}{5} = 1.2 \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x=-1+\sqrt{2}$, der kleinste der bei $x=-1$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x=-1+\sqrt{2}$ und ein globales Minimum bei $x=-1$.

c) Da f stetig und das Definitionsintervall kompakt ist, existiert ein globales Maximum und ein globales Minimum. Wir bestimmen die kritischen Punkte von f:

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + (x-1)\cdot(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (1+x-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$

Wegen $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ ist dies äquivalent zu

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Die kritischen Punkte von f sind somit

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Beide Werte liegen im Innern des Definitionsintervalls. Die Kandidaten für globale Extremstellen sind also die Randpunkte $x=-1$ und $x=2$ sowie die kritischen Punkte $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind:

$$\begin{aligned} f(-1) &= -\tfrac{2}{\sqrt{e}} = -1.213\ldots \\ f(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}) &= -\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}} = -1.336\ldots \\ f(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}) &= \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2}e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{4}} = 0.166\ldots \\ f(2) &= \tfrac{1}{e^2} = 0.135\ldots \end{aligned}$$

Der grösste dieser Werte ist der bei $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, der kleinste der bei $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Somit hat f ein globales Maximum bei $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und ein globales Minimum bei $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

3. Der Abstand zwischen einem Punkt (x,y) auf der Ellipse $x^2+4y^2=4$ und dem Punkt $(c,0)$ ist

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+\frac{4-x^2}{4}} = \sqrt{(x-c)^2+1-\frac{x^2}{4}}.$$

Bitte wenden!

Da die Quadratfunktion monoton wachsend ist, hat diese Funktion ein Minimum dort, wo ihr Quadrat ein Minimum hat. Wir suchen daher die Minimalstellen der Funktion

$$f : [-2, 2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x - c)^2 + 1 - \frac{x^2}{4}$$

für $c \in (0, 2)$. Diese Funktion ist stetig auf einem kompakten Intervall und nimmt daher ein Minimum an. Da die Funktion ausserdem im Inneren des Intervalls differenzierbar ist, kann dieses Minimum nur an den Intervallgrenzen oder einem kritischen Punkt im Inneren auftreten. Die Kandidaten sind daher:

$$\begin{aligned} x &= -2 \implies f(x) = f(-2) = (-2 - c)^2 = (c + 2)^2 > 4, \\ x &= 2 \implies f(x) = f(2) = (2 - c)^2 < 4, \\ f'(x) &= 2(x - c) - \frac{x}{2} = \frac{3}{2}x - 2c = 0 \iff x = \frac{4}{3}c. \end{aligned}$$

Für $\frac{3}{2} < c < 1$ liegt der letztere Punkt nicht in $[0, 2]$; also ist in diesem Fall die Minimalstelle von f bei $x = 2$ und der gesuchte Punkt auf der Ellipse ist $(2, 0)$.
Für $0 < c \leq \frac{3}{2}$ ist

$$f\left(\frac{4}{3}c\right) = \left(\frac{4}{3}c - c\right)^2 + 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}c\right)^2 = \frac{c^2}{9} + 1 - \frac{4c^2}{9} = 1 - \frac{c^2}{3}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{c^2}{3} \leq (2 - c)^2 = 4 - 4c + c^2 \\ \iff\ & \frac{4}{3}c^2 - 4c + 3 \geq 0 \\ \iff\ & c^2 - 3c + \frac{9}{4} \geq 0 \\ \iff\ & \left(c - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

und ist daher immer richtig. In diesem Fall ist also $x = \frac{4}{3}c$ die Minimalstelle von f und der gesuchte Punkt auf der Ellipse ist $\left(\frac{4}{3}c, \pm\sqrt{1 - \frac{4c^2}{9}}\right)$.