Musterlösung 2

1. a) Wegen $\frac{|x|}{1+|x|} \geq 0$ und $\frac{|0|}{1+|0|} = 0$, ist $0 \in M$ ein Minimum von M und daher auch ein Infimum von M.

Beh.: Es existiert kein Maximum und es ist $\sup M = 1 \notin M$.
Bew.: Die Zahl 1 ist eine obere Schranke, denn $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{|x|}{1+|x|} < 1$.
Wir zeigen nun, dass es keine kleinere obere Schranke gibt.
Sei $a < 1$. Wir suchen ein $x \in \mathbb{R}$ so dass $\frac{|x|}{1+|x|} > a$.

$$\frac{|x|}{1+|x|} > a \Leftrightarrow |x| > a \cdot (1 + |x|) \Leftrightarrow |x| > \frac{a}{1-a},$$

d.h. wir finden für jedes $a < 1$ ein x mit $\frac{|x|}{1+|x|} > a$ und a ist somit keine obere Schranke. Also ist 1 das Supremum von M. Es gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} : \frac{|x|}{1+|x|} < 1,$$

daher hat M kein Maximum.

b) Beh.: $\inf N = \min N = 2$ und $\max N = \sup N = \frac{5}{2}$.

Bew.: Für $x > 0$ ist

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{1}{x} \cdot (x^2 - 2x + 1) = \frac{1}{x}(x-1)^2 \geq 0.$$

Damit ist 2 eine untere Schranke der Menge N. Für $x = 1$ ist $1 + \frac{1}{1} = 2$ und somit folgt die Behauptung für das Minimum und das Infimum.
Ausserdem gilt $x + \frac{1}{x} \leq \frac{5}{2}$ für alle $\frac{1}{2} < x \leq 2$, denn für diese Werte gilt

$$x + \frac{1}{x} - \frac{5}{2} = \frac{1}{x}(x^2 - \frac{5}{2}x + 1) = \frac{1}{x}(x - \frac{1}{2}) \cdot (x-2) \leq 0.$$

Weiter gilt für $x = 2$, dass $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ ist und somit folgt die Behauptung für das Maximum und Supremum.

c)

$$P := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} : (x+1)^2 + 5y^2 < 4\}$$

Bitte wenden!

Geometrische Interpretation: Es gilt

$$(x+1)^2 + 5y^2 < 4 \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2/\sqrt{5}}\right)^2 < 1,$$

d.h. die Punkte (x, y), welche diese Ungleichung erfüllen, sind das Innere der Ellipse mit Mittelpunkt $(-1, 0)$ und Halbachsen $a = 2$ (in x-Richtung) und $b = 2/\sqrt{5}$ (in y-Richtung). Somit ist das Infimum $\inf P = -3$ und das Supremum $\sup P = 1$. Die Menge besitzt kein Maximum und kein Minimum, da Punkte auf dem Rand der Ellipse die geforderte Ungleichung nicht erfüllen.

Rechnerische Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} P &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} : (x+1)^2 < 4 - 5y^2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)^2 < 4\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| < 2\} =]-3, 1[. \end{aligned}$$

Somit gilt $\inf P = -3, \sup P = 1$. Minimum und Maximum von P existieren nicht.

2. Wir interpretieren das Wort “heisst” in “Alles verstehen heisst alles verzeihen” im Sinne von “impliziert”. Mit $A :=$ (alles verstehen) und $B :=$ (alles verzeihen), ist das Sprichwort eine Aussage der Form “$A \to B$”.

Die Aussagen a) und d) sind keine Einwände dagegen, da sie auf die Implikation überhaupt keinen Bezug nehmen.

Aussage e) sagt $B \wedge \neg A$, was $A \to B$ nicht widerspricht. Das Sprichtwort behauptet nicht, dass man nicht etwas verzeihen könnte, das man nicht versteht.

Bei der Aussage b) wird nicht behauptet, dass man *alles* versteht, deshalb ist b) kein gültiger Einwand.

Die Aussage c) drückt $A \wedge \neg B$ aus, was im Widerspruch zu $A \to B$ steht. Das heisst, c) ist ein gültiger Einwand gegen das Sprichwort.

3. a)

1. f ist konstant.
2. f ist (nach oben) unbeschränkt, d.h. f nimmt beliebig grosse Werte an.
3. f ist periodisch mit Periode α.
4. Nach 3. ist dies äquivalent zu “$\exists \alpha \in \mathbb{R} : f$ ist periodisch mit Periode α”. Dies gilt immer mit $\alpha = 0$. Somit ist die Aussage immer wahr.

Siehe nächstes Blatt!

b)

$$\begin{aligned}
\neg(\exists N \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\, \forall n > N : f(n) \leq \tfrac{1}{2}) &\overset{(1)}{=} \nexists N \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\, \forall n > N : f(n) \leq \tfrac{1}{2} \\
&\overset{(2)}{=} \forall N \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\, \neg(\forall n > N : f(n) \leq \tfrac{1}{2}) \\
&\overset{(3)}{=} \forall N \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\, \exists n > N : \neg(f(n) \leq \tfrac{1}{2}) \\
&= \forall N \in \mathbb{Z}^{\geq 0}\, \exists n > N : f(n) > \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Dabei benutzen wir folgende Überlegungen:
(1) Die Negation von es existiert $N \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ so dass... ist, dass es kein solches N gibt.
(2) Falls eine Aussage für kein N wahr ist, bedeutet das, dass sie für alle falsch ist.
(3) Die Negation davon, dass für alle n eine Aussage gilt, ist dass mindestens ein n existiert so dass die Aussage falsch ist