D-MATH
Prof. Richard Pink

Analysis I D-ITET

HS 2013

# Musterlösung 3

**1.** Wir verwenden die Lösungsformel für quadratische Gleichungen, um die Gleichung

$$3x^2 + 8xy - 3y^2 = 1$$

nach $y$ aufzulösen:

$$y = \frac{8x \pm \sqrt{64x^2 - 12(1-3x^2)}}{6} = \frac{1}{3}\left(4x \pm \sqrt{25x^2-3}\right).$$

Somit erhalten wir zwei Lösungsformeln

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{3}\left(4x + \sqrt{25x^2-3}\right) \quad \text{und} \\ f_2(x) &= \frac{1}{3}\left(4x - \sqrt{25x^2-3}\right). \end{aligned}$$

Sowohl $f_1(x)$ als auch $f_2(x)$ sind definiert, falls

$$25x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq \frac{\sqrt{3}}{5}$$

erfüllt ist. Beide Formeln liefern daher wohldefinierte Funktionen

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |x| \geq \frac{\sqrt{3}}{5} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Abbildung 1 zeigt die Vereinigung der Graphen der beiden Funktionen.

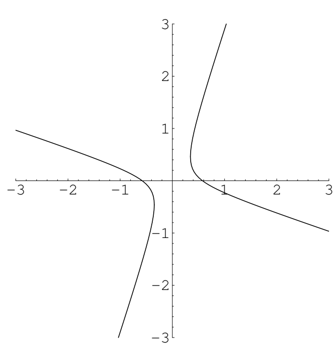


Abbildung 1: Vereinigung der Graphen von $f_1$ und $f_2$.

**Bitte wenden!**

**2.** Es gilt: $p_x(y) = y^3 + 4y^2 + xy = y(y^2 + 4y + x)$. Für jedes $x$ hat die Funktion $p_x$ also die Nullstelle $y_0 = 0$. Dazu kommen die Nullstellen des quadratischen Polynoms in Klammern. Diese sind für $x \leq 4$ gegeben durch

$$y_\pm = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4x}}{2} = -2 \pm \sqrt{4 - x},$$

die kleinere davon also durch $y_- = -2 - \sqrt{4 - x}$. Für $x > 4$ gibt hat das quadratische Polynom keine Nullstellen und folglich $p_x$ ausser $y_0 = 0$ keine weiteren Nullstellen.

Wegen $y_- < 0$ ist für $x \leq 4$ die kleinste Nullstelle von $p_x$ gegeben durch $f(x) = -2 - \sqrt{4 - x}$. Für $x > 4$ gilt dagegen $f(x) = y_0 = 0$, also

$$f(x) = \begin{cases} -2 - \sqrt{4 - x} & x \leq 4 \\ 0 & x > 4. \end{cases}$$

Abbildung 2 zeigt den Graphen von $f$.

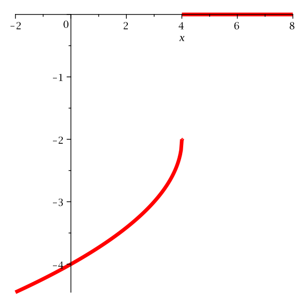


Abbildung 2: Graph von $f$.

**3. Eigenschaften von Abbildungen in mehreren Variablen:**

**a)** Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) := xyz$.

- $f$ ist nicht injektiv, denn es gilt z.B. $f(1, 1, 2) = f(2, 1, 1) = 2$.
- $f$ ist surjektiv, denn für jedes $w \in \mathbb{R}$ gilt: $f(1, 1, w) = w$.
- Da $f$ nicht injektiv ist, kann $f$ nicht bijektiv sein.

**b)** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $t \mapsto f(t) := (\cos(t), \sin(t), t)$.

- $f$ ist injektiv, denn für alle $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s \neq t$ stimmen die dritten Komponenten von $f(t)$ und $f(s)$ nicht überein. Es folgt also: $f(t) \neq f(s)$.
- $f$ ist nicht surjektiv, denn es ist $|\cos(t)| \leq 1$ und $|\sin(t)| \leq 1$. Also kann zum Beispiel der Wert $(2, 2, 1)$ nicht angenommen werden.
- Da die Funktion $f$ nicht surjektiv ist, kann sie nicht bijektiv sein.

**Siehe nächstes Blatt!**

**c)** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \mapsto f(x, y) := (x + y, x + y)$.

- $f$ ist nicht injektiv, denn es gilt z.B. $f(1, 2) = f(2, 1) = (3, 3)$.
- $f$ ist nicht surjektiv, denn es gibt z.B. kein $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, so dass $f(x, y) = (1, 2)$ gilt.
- Da $f$ weder injektiv noch surjektiv ist, kann $f$ nicht bijektiv sein.

**d)** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \mapsto f(x, y) := (x + y, x - y)$.

- $f$ ist injektiv, denn für alle $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ mit $f(a, b) = f(x, y)$ gilt

$$\begin{aligned} x + y &= a + b \\ x - y &= a - b \end{aligned}$$

  und durch Addition bzw. Subtraktion der beiden Gleichungen voneinander folgt $x = a$ und $y = b$.
- $f$ ist surjektiv, denn für jedes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ lässt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a &= x + y \\ b &= x - y \end{aligned}$$

  nach $x$ und $y$ auflösen, wir bekommen

$$x = \frac{1}{2}(a + b) \text{ und } y = \frac{1}{2}(a - b).$$

  Das heisst, es existiert ein $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (a, b)$.
- Da $f$ injektiv und surjektiv ist, ist $f$ auch bijektiv.