Musterlösung 4

1. Seien $\varepsilon > 0$ und $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{0\}$ beliebig gewählt. Wir zeigen nun, wie $\delta > 0$, in Abhängigkeit von ε, gewählt werden muss, damit für alle $(x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{0\}$ die $|(x, y) - (x', y')| < \delta$ erfüllen auch $|\frac{x}{y} - \frac{x'}{y'}| < \varepsilon$ gilt. Sei nun $\delta > 0$, so dass $\delta \leq \min\{1, \frac{|y|}{2}\}$ gilt. Weiter sei $(x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{0\}$ beliebig gewählt, so dass $|(x, y) - (x', y')| < \delta$ gilt. Damit, und mit

$$|x - x'| \leq |(x, y) - (x', y')| < \delta; \quad |y - y'| \leq |(x, y) - (x', y')| < \delta$$

erhalten wir:

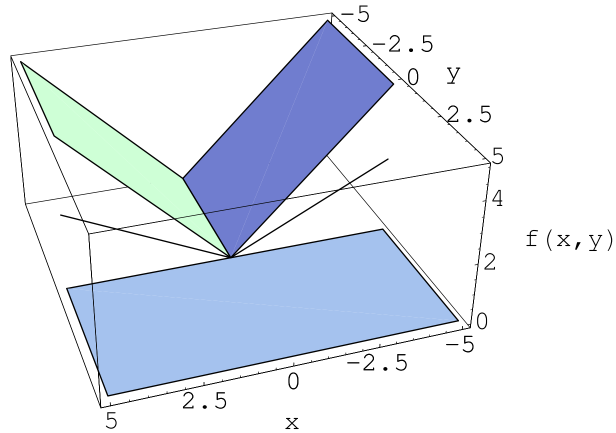
$$\begin{aligned}
\left|\frac{x}{y} - \frac{x'}{y'}\right| &= \left|\frac{x}{y} - \frac{x'}{y} + \frac{x'}{y} - \frac{x'}{y'}\right| \\
&\leq \left|\frac{x}{y} - \frac{x'}{y}\right| + \left|\frac{x'}{y} - \frac{x'}{y'}\right| \\
&< \frac{\delta}{|y|} + \left|\frac{x'}{y} - \frac{x'}{y'}\right| \\
&= \frac{\delta}{|y|} + |x'|\frac{|y' - y|}{|yy'|} \\
&< \frac{\delta}{|y|} + |x'|\frac{\delta}{|y||y'|} \\
&\leq \frac{\delta}{|y|} + (|x| + \delta)\frac{\delta}{|y|(|y| - \delta)} \\
&\leq \frac{\delta}{|y|} + (|x| + 1)\frac{\delta}{|y|\frac{|y|}{2}} \\
&= \delta\frac{|y| + 2(|x| + 1)}{|y|^2}.
\end{aligned}$$

Das heisst, wir können $\delta := \min\{1, \frac{|y|}{2}, \frac{\varepsilon|y|^2}{|y|+2(|x|+1)}\}$ wählen.

2. Es gilt

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sgn}(y))|x| = \begin{cases} |x| & \text{falls} \quad y < 0 \\ \frac{1}{2}|x| & \text{falls} \quad y = 0 \\ 0 & \text{falls} \quad y > 0 \end{cases}$$

Bitte wenden!



Die Funktion f ist in allen Punkten (x, y) mit $y < 0$ oder $y > 0$ stetig, weil sie dort in einer Umgebung gleich der stetigen Funktion $x \mapsto |x|$ bzw. $x \mapsto 0$ ist.

Behauptung: f ist in $(x, 0)$ mit $x \neq 0$ nicht stetig.

Beweis: Wir halten ein beliebiges $x \neq 0$ fest und formulieren zuerst die Negation der "Epsilon-Delta-Definition":

f ist an der Stelle $(x, 0)$ nicht stetig, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $\delta > 0$ ein y existiert, das gleichzeitig $|(x, y) - (x, 0)| < \delta$ und $|f(x, y) - f(x, 0)| \geq \varepsilon$ erfüllt.

Wählen wir $\varepsilon := |x|/4$, so besitzt für ein beliebiges $\delta > 0$ jedes y mit $|y| < \delta$ die oben gewünschte Eigenschaft: Sei z. B. $|y| = \delta/2$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
|(x, y) - (x, 0)| &= |y| = \delta/2 < \delta \quad \text{und} \\
|f(x, y) - f(x, 0)| &= |0 - \frac{1}{2}|x|| = \frac{1}{2}|x| > \frac{1}{4}|x| = \varepsilon, \quad \text{falls } y > 0, \\
|f(x, y) - f(x, 0)| &= ||x| - \frac{1}{2}|x|| = \frac{1}{2}|x| > \frac{1}{4}|x| = \varepsilon, \quad \text{falls } y < 0.
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Es genügt, den Beweis für $y > 0$ oder $y < 0$ zu führen. Wir haben der Vollständigkeit halber beide Wege angegeben.

Dass f in $(x, 0)$ mit $x \neq 0$ eine Sprungstelle besitzt, sieht man auch folgendermassen:

$$\lim_{y \to 0+} f(x, y) \;=\; \lim_{y \to 0+} 0 \;=\; 0 \;\neq\; \frac{1}{2}|x| \;=\; f(x, 0).$$

Behauptung: Im Punkt $(0, 0)$ ist f stetig.

Siehe nächstes Blatt!

Beweis: Zu jedem $\varepsilon > 0$ müssen wir einen Wert $\delta > 0$ finden, so dass gilt $\big|(x,y) - (0,0)\big| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$. Dafür beachten wir

$$|f(x,y) - f(0,0)| \ = \ |f(x,y)| \ \leq \ |x| \ \leq \ \big|(x,y)\big| \ = \ \big|(x,y) - (0,0)\big|.$$

Also gilt die gesuchte Implikation für $\delta := \varepsilon$.

3. Ein Fixpunkt von f ist ein $x_0 \in [0,1]$, so dass

$$f(x_0) = x_0 \tag{1}$$

gilt. Definieren wir $g(x) := f(x) - x$ für $x \in [0,1]$, so ist (1) äquivalent zu $g(x_0) = 0$. Die Fixpunkte von f ist also sind also genau die Nullstellen von g. Für f gilt nach Vorraussetzung, dass der Zielbereich das Intervall $[0,1]$ ist, d.h.

$$0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in [0,1].$$

Daraus folgt

$$g(0) = f(0) - 0 \geq 0 \quad \text{und} \quad g(1) = f(1) - 1 \leq 0,$$

also

$$g(1) \leq 0 \leq g(0).$$

Da g als Komposition von stetigen Funktionen stetig ist, können wir den Zwischenwertsatz anwenden, der uns sagt, dass g eine Nullstelle und damit f einen Fixpunkt besitzt.