Musterlösung 5

1. **a)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12} = \dfrac{2^2-5\cdot 2+6}{2^2-7\cdot 2+12} = \dfrac{0}{2} = 0;$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-8x+12}{|x-2|+|x^2-4|} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\overbrace{(x-2)}^{>0}(x-6)}{|x-2|(1+|x+2|)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-6}{1+|x+2|}$
$= -\dfrac{4}{5};$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-8x+12}{|x-2|+|x^2-4|} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\overbrace{(x-2)}^{<0}(x-6)}{|x-2|(1+|x+2|)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-(x-6)}{(1+|x+2|)}$
$= \dfrac{4}{5}.$

2. **a)** Wegen $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ist $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{y\to+\infty} e^{-y} = 0.$

b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}) = 0$ gilt. Das $\cos : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig ist gilt also

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \cos(\pi/2+\sqrt{x}-\sqrt{x-1}) &= \cos(\pi/2)\\ &= 0.\end{aligned}$$

c) Es ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{(\sqrt{x}+1)^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x^{3/2}+3x+3\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{x}+3+\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}} = 0,$$

weil der Zähler gegen 2 und der Nenner gegen ∞ strebt. Da die Funktion $x \mapsto \sin\sqrt{x}$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist, folgt

$$\lim_{x\to\infty} \sin\left(\sqrt{\frac{2x-1}{(\sqrt{x}+1)^3}}\right) = 0.$$

Bitte wenden!

3. Wir können den Grenzwert wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^4-2t^2+7t+1}-(\alpha t^2+\beta t+\gamma)\right)\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\sqrt{t^4-2t^2+7t+1}-(\alpha t^2+\beta t+\gamma)\right)\left(\sqrt{t^4-2t^2+7t+1}+(\alpha t^2+\beta t+\gamma)\right)}{\sqrt{t^4-2t^2+7t+1}+(\alpha t^2+\beta t+\gamma)}\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(t^4-2t^2+7t+1-(\alpha^2t^4+2\alpha\beta t^3+(\beta^2+2\alpha\gamma)t^2+2\beta\gamma t+\gamma^2)\right)}{\sqrt{t^4-2t^2+7t+1}+(\alpha t^2+\beta t+\gamma)}.
\end{aligned}$$

Um den Grenzwert möglichst klein zu machen, wählen wir die Parameter so, dass das Polynom im Zähler einen möglichst kleinen Grad hat. Das bedeutet

$$\begin{aligned}
1-\alpha^2&=0\\
2\alpha\beta&=0\\
-2-(\beta^2+2\alpha\gamma)&=0.
\end{aligned}$$

Und somit $\alpha=\pm1$, $\beta=0$ und $\gamma=-\alpha=\mp1$. Die Möglichkeit mit $\alpha=-1$ können wir ausschliessen, da in diesem Fall schon $\lim_{t\to\infty}-(\alpha t^2+\beta t+\gamma)=\infty$ und damit erst recht $\lim_{t\to\infty}\sqrt{\ldots}-(\alpha t^2+\beta+\gamma)=\infty$. Für $\alpha=1$ ist der Grenzwert nach der obigen Rechnung

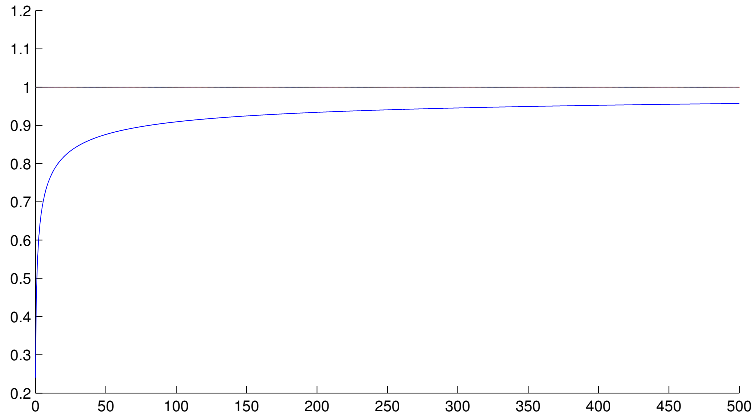
$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^4-2t^2+7t+1}-(t^2-1)\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{7t}{\sqrt{t^4-2t^2+7t+1}+t^2-1}\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{7}{t}}{\frac{\sqrt{t^4-2t^2+7t+1}}{t^2}+1-\frac{1}{t^2}}=0.
\end{aligned}$$

Die so erhaltene Lösung ist auch die einzige, denn die Differenz zwischen je zwei Lösungen ist ein Polynom P mit $\lim\limits_{t\to\infty}P(t)=0$, und das einzige Polynom mit dieser Eigenschaft ist das Nullpolynom.

4. **a)** $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{t+\sqrt{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{t}}}=\frac{1}{1+0}=1.$

Darum ist die Asymptote die konstante Funktion $h(t)=1$ auf $\mathbb{R}$.

Siehe nächstes Blatt!



Matlab:

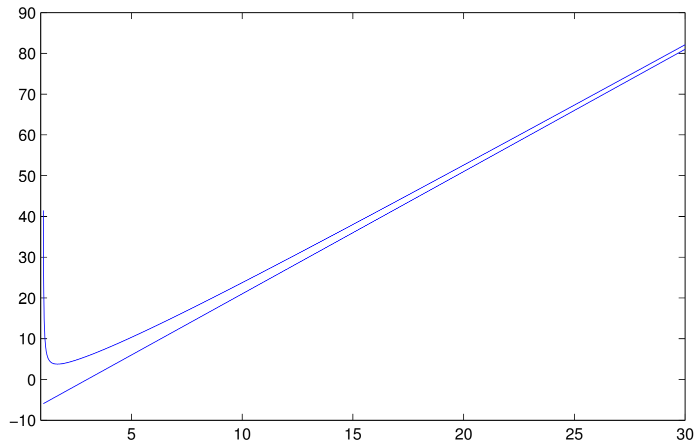
```
x=0:0.1:500;
y=x./(x+sqrt(x));
z=1;
hold;
plot(x,y)
plot(x,z);
```

b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
p &= \lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \frac{\left(3t^3 - t + 2\right)}{\left(t^2 + 3t - 4\right)} = \lim_{t\to\infty} \frac{3t^3 - t + 2}{t^3 + 3t^2 - 4t} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t^3}}{1 + \frac{3}{t} - \frac{4}{t^2}} = 3 \\
q &= \lim_{t\to\infty} (g(t) - pt) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{3t^3 - t + 2}{t^2 + 3t - 4} - 3t\right) \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{3t^3 - t + 2 - 3t^3 - 9t^2 + 12t}{t^2 + 3t - 4} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{-9t^2 + 11t + 2}{t^2 + 3t - 4} = \lim_{t\to\infty} \frac{-9 + \frac{11}{t} + \frac{2}{t^2}}{1 + \frac{3}{t} - \frac{4}{t^2}} = -9.
\end{aligned}$$

Deshalb ist die Asymptote die Funktion $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $k(t) = p \cdot t - q = 3t - 9$.

Bitte wenden!



Matlab:

```
x=1.02:0.01:30;
y=(3*(x.^3)-x+2)./((x.^2)+3*x-4);
z=3*x-9;
hold;
plot(x,y)
plot(x,z);
```