Musterlösung 6

1. **a)** $x_1 = 0.33$, $x_2 = 0.3333$, $x_3 = 0.33333333$.

b) Es gilt $x_{n+1} - 1/x = -x_n^2 x + 2x_n - 1/x = -x(x_n - 1/x)^2 \leq 0$, also ist $x_n \leq 1/x$ für alle $n \geq 1$. Daraus folgt $x_{n+1} - x_n = x_n(1 - xx_n) \geq 0$, d.h. $x_{n+1} \geq x_n > 0$, $n \geq 1$. Die Folge ist also ab $n = 1$ monoton wachsend und von oben durch $1/x$ beschränkt. Sie besitzt somit einen positiven Grenzwert $x_\infty = x_\infty(2 - xx_\infty)$. Wir erhalten, dass $x_\infty = 1/x$ ist.

2. **a)** Es gilt: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n+1)}{2n^2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Daher ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

b) Das n-te Folgenglied a_n ist die n-te Partialsumme der harmonischen Reihe. Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = \infty,$$

wie aus der Vorlesung bekannt ist.

c) Für alle $n \in \mathbb{Z}^{>0}$ gilt

$$5 = \sqrt[n]{5^n} \leq a_n \leq \sqrt[n]{5^n + 5^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 5^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 5.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ erhalten wir $5 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq 5$. Also gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$.

3. **a)** Die Reihe konvergiert nach dem Majorantenkriterium: Für $n \geq 1$ lässt sich jeder Summand durch $\frac{1}{2^{n-1}}$ abschätzen. Somit ist die konvergente Reihe $\sum_{n=0}^\infty 2^{-n}$ eine Majorante.

Bitte wenden!

b) Die Reihe divergiert da $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ eine divergente Minorante darstellt.

c) Nach dem Konvergenzkriterium von Leibniz konvergiert diese alternierde Reihe, da die Beträge der Reihenglieder $\frac{1}{\log n}$ eine monoton fallende Nullfolge bilden.

Die Konvergenz ist jedoch nicht absolut, denn für $n \geq 2$ ist

$$\frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$$

und die harmonische Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ bildet somit eine divergente Minorante für die Reihe der Beträge.

d) Es gilt $\frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1+1/2}}$. Nach dem Hinweis konvergiert die Reihe also. Dies wird auch noch in der Vorleseung besprochen.

e) Die Folge der Summanden $n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ konvergiert nicht gegen 0, denn es gilt

$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Folglich konvergiert diese Reihe nicht.